235

EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA DE SAMUELSON

Ramón García-Cobián

Abril, 2004

DOCUMENTO DE TRABAJO 235
http://www.pucp.edu.pe/economia/pdf/DDD235.pdf

EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA DE SAMUELSON

Ramón García-Cobián

RESUMEN

El llamado Principio de Correspondencia de Samuelson ha dado lugar a no pocos malentendidos con sus consiguientes aplicaciones incorrectas. El presente artículo pretende delimitarlo indicando cuáles son las condiciones bajo las cuales dicho principio alcanza validez.

ABSTRACT

The so called Correspondence Principle of Samuelson has often been misunderstood and incorrectly applied. This paper aims to restrict it by making explicit conditions under which it becomes valid.

EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA DE SAMUELSON[1]

Ramón García-Cobián[2]

INTRODUCCIÓN

En su ya clásica obra, *Foundations of economic analysis*, se encuentran las siguientes declaraciones de Paul Samuelson:

> "… when we leave single economic units, the determination of unknowns is found to be unrelated to an extremum position. In even the simplest business cycle theories there is lacking symmetry in the conditions of equilibrium so that there is no possibility of directly reducing the problem to that of a maximum or minimum. Instead the dynamical properties of the system are specified, and the hypothesis is made that the system is in "stable" equilibrium or motion. By means of what I have called the *Correspondence Principle* between comparative statics and dynamics, definite *operationally meaningful* theorems can be derived from so simple a hypothesis." (p.5)

> "We find ourselves confronted with this paradox: in order for the comparative-statics analysis to yield fruitful results, we must first develop a theory of dynamics." (p. 263)

De todo esto se ha llegado a emplear el llamado "Principio de Correspondencia" como uno que permitiría un tipo de inferencias como el que ilustra el siguiente ejemplo. Supóngase un modelito macroeconómico muy simple, a saber, $Y = C(Y) + G$, donde la función consumo se define por $C(Y) := a \ln (Y + 1)$. Si para cierto valor, G^*, del parámetro del gasto público, se tuviese un equilibrio, Y^*, entonces la estática comparativa querría determinar el signo del cambio, DY^*, efectuado en el ingreso por un cambio arbitrario pero pequeño, DG^*. Como es bien conocido, dicha relación de cambios vendría dada por la expresión:

$$DY^* = (1 - a / (Y^* + 1))^{-1} DG^*.$$

---

1 Ver: Samuelson, P.: *Foundations of economic analysis*, Atheneum, N.York, 1965.

2 Profesor del Departamento de Ciencias de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Sin embargo, si α es también un parámetro, entonces el signo del multiplicador dependería de la magnitud de α. Ahora bien, sería plausible concebir al modelo estático como proveniente de un modelo dinámico en el que la velocidad de reacción de la variable endógena, Y, ante un desequilibrio fuera directamente proporcional a la demanda excedente: $dY/dt = k\ (-Y + C(Y) + G)$. Es fácil comprobar que el equilibrio estático anterior es también el equilibrio dinámico de este modelo cuando G vale G^*. Si se asume que los modelos estáticos que se dan en la realidad sólo pueden provenir de modelos dinámicos cuyo equilibrio sea asintóticamente estable, entonces, sostienen algunos, el 0 debiera ser un equilibrio asintóticamente estable para el sistema lineal asociado:

$$dY/dt = k\ (-1 + a/(Y^* + 1))\ Y.$$

Esto equivale a que: $\alpha < Y^* + 1$. Se ve fácilmente que esta condición determina el signo del multiplicador en el modelo estático anterior como positivo.

1. TODO COMIENZA CON LA ESTÁTICA COMPARATIVA

Considérese el modelo simple de la IS-LM:

$$Y = C(Y) + I(r) + G$$

$$M = L(Y, r) \quad ,$$

Con las hipótesis habituales, a saber, que $0 < C' < 1$, que $I'(r) < 0$, y que $L_Y > 0 > L_r$. Como es bien sabido, si para ciertos valores dados de los parámetros o variables exógenas, G^* y M^*, existe un equilibrio, a saber, (Y^*, r^*) (único, por lo demás, gracias a las hipótesis hechas), entonces la cuestión fundamental de la estática comparativa es la de estimar aproximadamente las variaciones en los valores de equilibrio de las variables endógenas, DY^* y Dr^*, que resultan de la imposición de cambios arbitrarios pero bastante pequeños en los valores de las variables exógenas, DG^* y DM^*. Ahora bien, es ésta una cuestión resoluble, genéricamente, por medio del teorema de la función implícita (Ver Chiang, pp.216-217)[3]:

[3] Chiang, A.: *Métodos fundamentales de la economía matemática,* Mc Graw-Hill/Interamericana de México, S.A., México, 1987.

$$\begin{bmatrix} \Delta Y^* \\ \Delta r^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1+C'(Y^*) & I'(r^*) \\ L_Y(Y^*,r^*) & L_r(Y^*,r^*) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta G^* \\ \Delta M^* \end{bmatrix} =$$

$$(\det)^{-1} \begin{bmatrix} -L_r(Y^*.r^*) & I'(r^*) \\ L_Y(Y^*,r^*) & 1-C'(Y^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta G^* \\ -\Delta M^* \end{bmatrix},$$

siendo la determinante positiva, pues vale:

$$-(1-C'(Y^*))\, L_r(Y^*, r^*) - I'(r^*)\, L_Y(Y^*\, r^*) > 0,$$

debido a las asunciones habituales arriba indicadas . Por lo tanto, se sigue de lo anterior que los signos de los "multiplicadores" son como se indica a continuación:

$$\tfrac{\partial Y^*}{\partial G^*} > 0,\ \tfrac{\partial Y^*}{\partial M^*} > 0,\ \tfrac{\partial r^*}{\partial G^*} > 0 \text{ y } \tfrac{\partial r^*}{\partial M^*} < 0.$$

2. EN MODELOS MENOS SIMPLES SURGEN INDETERMINACIONES

Puede comprobarse sin dificultad que si el modelo anterior se modificara levemente haciendo que la inversión ahora dependa también del ingreso y de modo directo, i.e., $0< I_Y, I_r < 0$; entonces ya no estarían unívocamente determinados los signos de los multiplicadores. En efecto, ahora se tendría:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y^* \\ \Delta r^* \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1+C'(Y^*)+I_Y(Y^*,r^*) & I_r(Y^*,r^*) \\ L_Y(Y^*,r^*) & L_r(Y^*,r^*) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta G^* \\ \Delta M^* \end{bmatrix},$$

Siendo ahora indeterminado el signo de la determinante, pues así es el signo de $-1+C'(Y^*)+I_Y(Y^*,r^*)$.

Sin embargo, dice Samuelson, si el equilibrio (Y^*,r^*) de este modelo estático lo fuese también del correspondiente modelo dinámico:

$$dY/dt = a\ (-Y + C(Y) + I(Y, r) + G)$$
$$dr/dt = b\ (-M + L(Y, r)\quad ,$$

con las constantes de reacción de Y y r ante el desequilibrio asumidas como positivas; entonces, como es bien sabido, tal equilibrio será asintóticamente estable si fuese negativa la traza y positiva la determinante de la matriz jacobiana evaluada en dicho equilibrio. Esto es:

$$0 > -1 + C'(Y^*) + I_Y(Y^*, r^*) + L_r(Y^*, r^*) \text{ Ù } 0 < det\ J^*,$$

siendo J^* la jacobiana del sistema evaluada en el equilibrio.

Pero, como es fácil comprobar, en tal caso sí que serían determinados los signos de algunos multiplicadores, por lo menos, a saber, dY/dG , dY/dM y dr/dG que serían positivos, en tanto que seguiría indeterminado el de dr/dM. de todos modos, es éste un considerable progreso respecto a la situación anterior en la que había una mayor indeterminación.

3. EL PRINCIPIO DE CORRESPONDENCIA DE SAMUELSON

El sistema dinámico anterior no es sino el sistema lineal asociado a otro sistema dinámico de la forma:

$$dY/dt = f\,(-Y + C(Y) + I(Y, r) + G)$$
$$dr/dt = g\,(-M + L(Y, r))$$

donde f y g son funciones reales de variable real que pasan por el origen y que allí tienen derivadas positivas: $f'(0) = \alpha \wedge g'(0) = \beta$.

De las consideraciones anteriores dedujo Samuelson su famoso "principio de Correspondencia", según el cual:

> *"Si se asume que un equilibrio de un sistema estático es equilibrio asintóticamente estable de un sistema dinámico, entonces pueden determinarse unívocamente los signos de los multiplicadores de aquel sistema estático".*

Lo anterior, puesto en símbolos, sostiene que si el sistema estático

$$f_1\,(x_1, \dots, x_n;\ l_1, \dots, l_m) = 0$$
$$\vdots$$
$$f_n\,(x_1, \dots, x_n;\ l_1, \dots, l_m) = 0,$$

donde las f_i representan, por ejemplo, las demandas excedentes, tiene por solución, cuando los parámetros valen λ*, al punto x^*; entonces, si el sistema dinámico

$$dx_1/dt = g_1\,(f_1\,(x_1, \dots, x_n;\ l_1, \dots, l_m))$$
$$\vdots$$
$$dx_n/dt = g_n\,(f_1\,(x_1, \dots, x_n;\ l_1, \dots, l_m)),$$

donde las g_i se anulan en 0 y tienen allí derivadas positivas, tiene al punto x^* por equilibrio dinámico asintóticamente estable cuando los parámetros valen λ*; entonces los signos de las derivadas ¶x^*_i/¶l_j quedan determinados por las condiciones que garantizan la estabilidad asintótica del origen en el sistema lineal asociado:

$$dx_1/dt = g_1\,'(0)\ (gradf_1(x^*_1, \dots, x^*_n;\ l^*_1, \dots, l^*_m))$$
$$\vdots$$
$$dx_n/dt = g_n\,'(0)\ (gradf_n\,(x^*_1, \dots, x^*_n;\ \lambda^*_1, \dots, \lambda^*_m)).$$

4. LA CRÍTICA

En general no es cierto que el sistema lineal asociado a un equilibrio asintóticamente estable de un sistema dinámico tenga al origen por equilibrio también asintóticamente estable, como lo muestra el siguiente contraejemplo en dimensión 1.

El sistema $dx/dt = -x^3$ tiene por equilibrio al 0, pero su sistema lineal asociado en el 0, el $dx/dt = 0$, no tiene al 0 como un equilibrio asintóticamente estable sino sólo estable.

Por lo tanto, no se justifica el asumir que si un equilibrio es asintóticamente estable, el sistema lineal asociado correspondiente tenga al origen por equilibrio también asintóticamente estable.

Además, incluso si se admitiera lo anterior, no por ello se determinaría el signo de los multiplicadores, como lo muestra el siguiente contraejemplo. Sea una economía de cuatro mercancías con sus respectivos mercados, de modo que la cuarta mercancía sea el numerario. Entonces si el sistema lineal asociado tuviera por inversa de la matriz jacobiana en el equilibrio a la matriz J, los multiplicadores serían dados por:

$$\begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} dl_1 \\ dl_2 \\ dl_3 \end{bmatrix}$$

Puede comprobarse sin dificultad que las dos siguientes posibles matrices

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad y \quad \begin{bmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -29 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

bien podrían representar a la J, pues ambas tienen por valores propios a –2, -3 y –1, con lo que se garantiza la estabilidad asintótica del origen en el sistema lineal asociado. Sin embargo, si los cambio impuestos en los valores de los parámetros fueran en ambos casos (0, 1, 1), entonces se obtendría, con la primera matriz, el resultado $dx_2 = -1$, y con la segunda matriz, el resultado $dx_2 = 1$. Como puede verse, no quedaría determinado el signo de los multiplicadores.

5. LA PROPUESTA

Una mejora parcial se obtendría, por lo antedicho, con la siguiente reformulación del "principio de Correspondencia":

> *"Si se asume que un equilibrio de un sistema estático es equilibrio hiperbólico y asintóticamente estable de un sistema dinámico* ***que tiene al origen como equilibrio también asintóticamente estable de su sistema lineal asociado****, entonces pueden determinarse unívocamente los signos de* ***algunos*** *multiplicadores de aquel sistema estático".*

6. CONCLUSIÓN

Ha de haber quedado claro que el llamado "principio de Correspondencia" no puede resultar de gran utilidad, pues en general, todo ha de depender de la forma en que se dinamice un sistema estático. Es que no siempre la dinámica ha de ser dada por el hecho de que las velocidades de ajuste de las variables endógenas en desequilibrio sean funciones directas de las demandas excedentes de dichas variables. Bien podrían darse otros tipos de ajuste en cada caso concreto[4].

[4] Ver, por ejemplo, Arrow, K. y F. Hahn: *General competitive analysis,* Holden Day, San Francisco, 1971.