

DOCUMENTO DE TRABAJO N° 347

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE MALLIAVIAN PARA LAS FINANZAS CON APLICACIÓN A LA ELECCIÓN DINÁMICA DE PORTAFOLIO

Guillermo Moloche

DEPARTAMENTO
DE **ECONOMÍA**



PONTIFICIA
**UNIVERSIDAD
CATÓLICA**
DEL PERÚ

DOCUMENTO DE TRABAJO N° 347

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO DE MALLIAVIN PARA LAS FINANZAS CON APLICACIÓN A LA ELECCIÓN DINÁMICA DE PORTAFOLIO

Guillermo Moloche

Diciembre, 2012

DEPARTAMENTO
DE **ECONOMÍA**



DOCUMENTO DE TRABAJO 347

<http://www.pucp.edu.pe/departamento/economia/images/documentos/DDD347.pdf>

© Departamento de Economía – Pontificia Universidad Católica del Perú,
© Guillermo Moloche

Av. Universitaria 1801, Lima 32 – Perú.
Teléfono: (51-1) 626-2000 anexos 4950 - 4951
Fax: (51-1) 626-2874
econo@pucp.edu.pe
www.pucp.edu.pe/departamento/economia/

Encargado de la Serie: Luis García Núñez
Departamento de Economía – Pontificia Universidad Católica del Perú,
lgarcia@pucp.edu.pe

Guillermo Moloche

Introducción al cálculo de Malliavin para las finanzas con aplicación a la
elección dinámica del portafolio
Lima, Departamento de Economía, 2012
(Documento de Trabajo 347)

PALABRAS CLAVE: Cálculo de Malliavin, teoría del portafolio,
optimización intertemporal, asignación estratégica de activos,
simulaciones de Monte Carlo.

Las opiniones y recomendaciones vertidas en estos documentos son responsabilidad de sus
autores y no representan necesariamente los puntos de vista del Departamento Economía.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2012-15881.
ISSN 2079-8466 (Impresa)
ISSN 2079-8474 (En línea)

Impreso en Cartolán Editora y Comercializadora E.I.R.L.
Pasaje Atlántida 113, Lima 1, Perú.
Tiraje: 100 ejemplares

Introducción al cálculo de Malliavin para las finanzas con aplicación a la elección dinámica del portafolio

Guillermo Moloche
PUCP

Resumen

Este artículo es una revisión de las ideas básicas del cálculo de Malliavin relevantes para las finanzas. El cálculo de Malliavin proporciona un conjunto de herramientas matemáticas que ha permitido resolver algunos problemas de importancia práctica en las finanzas cuantitativas y que se ha plasmado en técnicas que se usan diariamente en instituciones financieras alrededor del mundo. Revisamos algunas de estas aplicaciones y hacemos un énfasis especial en la implementación concreta de técnicas de elección óptima del portafolio para inversionistas de largo plazo.

Abstract

This article is a review of basic Malliavin calculus applied to finance. The Malliavin calculus provides a set of mathematical tools that have allowed solving important practical problems in quantitative finance. These tools have been turned into techniques currently in use by financial institutions around the world. We review a few of these applications with special emphasis in the numerical implementation of solution techniques for the optimal portfolio choice of long term investors.

Clasificación JEL: C02, C61, C63, D91, G11.

Palabras claves: Cálculo de Malliavin, teoría del portafolio, optimización intertemporal, asignación estratégica de activos, simulaciones de Monte Carlo.

1 Introducción¹

Este trabajo es una introducción a las ideas básicas del cálculo de Malliavin con un enfoque aplicado a las finanzas. No obstante que se requiere un alto nivel de especialización matemática para entender plenamente las demostraciones de sus resultados básicos, el cálculo de Malliavin es el fundamento teórico que subyace a soluciones innovadoras a problemas importantes en las finanzas académicas como también en las finanzas aplicadas. En este último caso, las soluciones que usan el cálculo de Malliavin han sido implementadas y son de uso diario en instituciones financieras alrededor del mundo.

Debido a que el empleo del cálculo de Malliavin en las finanzas es cada vez más extenso, es preciso difundir sus ideas básicas al mayor público posible. Al mismo tiempo, no es posible apreciar la conveniencia del cálculo de Malliavin sin un conocimiento básico de finanzas cuantitativas. Es hacia este público que este artículo está dirigido, lo que implica que el lector ya está familiarizado con, por ejemplo, los elementos de los procesos estocásticos, movimientos brownianos, espacios de Wiener, ecuaciones diferenciales estocásticas, el cálculo de Itô, la valuación de contratos contingentes por ausencia de arbitraje y la teoría intertemporal del portafolio.

Este trabajo se desarrolla como sigue: primero presentamos los resultados básicos del cálculo de Malliavin en una forma heurística, procurando que el lector pueda entender los requisitos y supuestos para el empleo de sus principales proposiciones y en qué contextos se puede aplicar. La demostración rigurosa de estos resultados es la cuestión de la que se ocupan tratados tales como los de Nualart (2006), Sanz-Solé (2005), Malliavin (1997), y las introducciones de Bally (2003) y Øksendal (1997).

Luego reseñamos brevemente dos problemas prácticos en las finanzas y cuál ha sido la contribución del cálculo de Malliavin en su solución. Estos problemas son: el cálculo de griegos en la valuación de activos contingentes y las simulaciones de Monte Carlo de esperanzas condicionales.

Sin embargo, damos particular énfasis a las aplicaciones en la asignación estratégica de activos, es decir, la elección óptima del portafolio de los inversionistas de largo plazo. Por lo tanto revisamos el problema del portafolio de Merton (1969, 1971), su solución por medio del método de martingalas dada por Cox y Huang (1989) y Karatzas et. al (1987) y finalmente, mostramos cómo el cálculo de Malliavin es una herramienta que permite la implementación práctica de la teoría intertemporal del portafolio. En este caso la dificultad consiste en que la resolución de un problema multidimensional de optimización dinámica no es factible empleando los métodos conven-

¹Se agradece los comentarios de César Carrera y el apoyo de Vanessa Belapatiño.

cionales. Sin embargo, las técnicas que usan el cálculo de Malliavin permiten resolver en principio problemas con muchas dimensiones, lo que es crucial para problemas dinámicos de elección de portafolio, ya que cada variable de estado o clase de activo añade una dimensión más. Usando las herramientas básicas del cálculo de Malliavin presentadas previamente, explicamos detalladamente los pasos de la demostración matemática de la fórmula del portafolio óptimo intertemporal de Detemple, Garcia y Rindisbacher (2003, 2005). Finalmente esbozamos la implementación computacional de esta fórmula.

2 El cálculo de Malliavin

En esta sección presentamos el cálculo de variaciones estocástico también llamado cálculo de Malliavin. Esta teoría tiene un gran componente de cálculo estocástico y el formalismo puede ser complejo, pero las aplicaciones de esta teoría en las finanzas son numerosas.

Para hacer este texto lo más accesible posible, hemos tratado de exponer en forma didáctica e intuitiva y con ejemplos sencillos. Posteriormente reseñamos dos aplicaciones del cálculo de Malliavin a las finanzas, la primera para el cálculo de los “griegos” de contratos contingentes, tales como las opciones, y la segunda, para el cálculo de esperanzas condicionales.

2.1 Introducción al cálculo de Malliavin para finanzas

En dimensión finita, el cálculo diferencial convencional analiza la dependencia de una función real con respecto al cambio infinitesimal en su argumento también real, o en el caso multidimensional, con respecto a cada una de las coordenadas de su argumento, en este caso un vector en $\mathbb{R}^d$. El cálculo de Malliavin es también un cálculo diferencial pero con respecto a espacios de dimensión infinita, como lo es por ejemplo el espacio de Wiener $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$. En este espacio, una trayectoria browniana se puede entender como una función continua que es un objeto de dimensión infinita. En el cálculo de Malliavin, el operador de la diferenciación o la derivada de Malliavin, D , calcula la dependencia de una variable aleatoria con respecto a un incremento infinitesimal o perturbación en, por ejemplo, una trayectoria browniana. Recordemos que una variable aleatoria puede interpretarse como un funcional de Wiener, es decir, una función cuyos argumentos están contenidos en el espacio de Wiener y que toma valores en un espacio vectorial real.

Por eso se dice que el cálculo de Malliavin es un cálculo de variaciones para procesos estocásticos. En particular, así como se puede aplicar a funcionales brownianos (o de Wiener) es decir, a variables aleatorias y procesos

estocásticos que dependen de las trayectorias de movimientos brownianos, también se puede aplicar a funcionales que dependen de procesos más generales, como los movimientos brownianos fraccionales o los procesos de Lévy, los cuales no serán abordados aquí.

En esta sección presentamos primero los dos objetos básicos del cálculo de Malliavin, el operador de diferenciación o derivada en el sentido de Malliavin y la integral de Skorokhod. La concomitancia entre estos dos objetos está dada por la relación de dualidad que permite a su vez obtener la fórmula de integración por partes del cálculo de Malliavin. Presentamos algunas propiedades básicas como la regla de la cadena, la conmutatividad de la derivada de Malliavin y el operador de expectativas, así como la fórmula de Clark-Ocone y la de Bismut-Elworthy-Li.

2.1.1 La derivada de Malliavin

Consideremos el espacio de Wiener $C([0, \infty), \mathbb{R}^d)$ denotado por Ω , de funciones continuas y no diferenciables, sobre el cual toma valores el proceso de movimiento browniano en dimensión d : $W = (W^1, \dots, W^d)'$, que es definido sobre el espacio de probabilidad canónico $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde $\mathcal{F}$ es el sigma-álgebra boreliano y P la medida de Wiener. Asimismo denotamos la filtración browniana como $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s; s \leq t)$.

Como es de costumbre, podemos asociar cada estado de la naturaleza $\omega \in \Omega$ a una trayectoria del movimiento browniano $W = (W_s, s \in [0, \infty))$, en otras palabras, el conjunto de estados de la naturaleza es el espacio de trayectorias. Sea $F(\omega) = F(W(\omega))$ una variable aleatoria $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, y supongamos que queremos diferenciar F con respecto a las trayectorias brownianas $W(\omega)$, esto es lo mismo que diferenciar F con respecto al parámetro $\omega \in \Omega$. Sin embargo las trayectorias brownianas $W(\omega)$ son objetos de dimensión infinita y he aquí la dificultad. Es por este motivo que primero se construye una definición de la derivada de Malliavin para objetos de dimensión finita para luego extender la misma a objetos de dimensión infinita con aproximaciones por medio de secuencias. Los objetos de dimensión finita básicos son en este artículo las variables aleatorias suaves, es decir, funcionales continuamente diferenciables que dependen de un número finito de puntos de una trayectoria browniana. Extendemos luego la definición de F para que pueda depender de W en un número infinito de puntos, como por ejemplo en un intervalo entero.

La derivada de Malliavin de una variable aleatoria suave Por el momento, nos ocuparemos solamente del caso en que F depende de un número finito de puntos de W . Tomemos una partición $(t_1, \dots, t_n)$ del intervalo de

tiempo $[0, T]$ y sea $F(\omega) = F(W(\omega))$ una variable aleatoria de la forma $F(W) \equiv f(W_{t_1}, \dots, W_{t_n})$, donde f es una función diferenciable continuamente. La variable aleatoria $F(W)$ depende (suavemente) del movimiento browniano W de dimensión d en un número finito de puntos de su trayectoria. Llamamos a F una variable aleatoria suave o funcional browniano suave.

Caso unidimensional La derivada de Malliavin de F es el cambio en F atribuido a un cambio pequeño en la trayectoria de W . Asumimos primero que $d = 1$. Desplacemos la trayectoria de W en ε a partir del periodo t . Supongamos que $t_k \leq t < t_{k+1}$ para algún $k = 1, \dots, n$. La derivada de Malliavin de F en t es definida como

$$\begin{aligned} D_t F(W) &\equiv \left. \frac{\partial f(W_{t_1} + \varepsilon 1_{[t, \infty)}(t_1), \dots, W_{t_k} + \varepsilon 1_{[t, \infty)}(t_k), \dots, W_{t_n} + \varepsilon 1_{[t, \infty)}(t_n))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(W + \varepsilon 1_{[t, \infty)}) - F(W)}{\varepsilon}, \text{ } P\text{-a.e.} \end{aligned}$$

para $t \in [0, T]$, donde $1_{[t, \infty)}$ es el indicador del conjunto $[t, \infty)$, es decir $1_{[t, \infty)}(s) = 1$ si $s \in [t, \infty)$, y $1_{[t, \infty)}(s) = 0$ en caso contrario. Esta definición nos permite interpretar la derivada de Malliavin como una derivada direccional: el operador D_t calcula el efecto de una perturbación de tamaño ε en la trayectoria del movimiento browniano W en el momento t sobre la variable aleatoria F . Nótese que esta definición se debe cumplir para cualquier trayectoria (de medida no cero), y por tanto las relaciones en el cálculo de Malliavin se cumplen P -a.e. o P -almost-everywhere: “ P -casi en todas partes”. En lo que sigue, suprimimos la notación P -a.e., pero indicaremos cuando una relación no se cumpla de esta forma.

También podemos escribir, en forma más compacta,

$$D_t F(\omega) = \sum_{j=k}^n \partial_j f(W_{t_1}, \dots, W_{t_k}, \dots, W_{t_n}) 1_{[t, \infty)}(t_j),$$

donde $\partial_j f = \partial f(x) / \partial x_j$ es la derivada con respecto al j -ésimo argumento de f . Los primeros $k-1$ términos se omiten en este caso porque la función indicadora es cero para $j < k$.

Ejemplo: la derivada de Malliavin de un movimiento browniano

Tomemos $F = W_s$, donde s es fijo y $s \in [0, \infty)$. Entonces

$$D_t W_s = 1_{t \leq s}.$$

En este caso si el funcional depende del valor de W en s y se toma la derivada de Malliavin en un momento $t > s$, estamos tratando de calcular el efecto de

un cambio en la trayectoria browniana en un momento posterior al valor que es relevante para el funcional y por lo tanto $D_t W_s = 0$ en este caso. Si $t \leq s$, el cambio en la trayectoria browniana en el momento t sí afecta los valores del funcional y por tanto la derivada de Malliavin es uno.

Ejemplo: el modelo Black-Scholes El precio de una acción en el modelo Black-Scholes está dado por un proceso de Itô llamado movimiento browniano geométrico

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad t \geq 0$$

con S_0 dado. Reexpresando este precio en forma de integral obtenemos para el periodo T

$$S_T = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right),$$

donde W_T es el valor terminal del proceso de movimiento browniano univariado que define la incertidumbre en este modelo. Como $S_T = f(W_T)$ con $f(x) = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)T + \sigma x)$ y f es continuamente diferenciable, es claro que S_T es un funcional browniano suave. Aplicando la definición de la derivada de Malliavin obtenemos

$$\begin{aligned} D_t S_T &= \partial f(W_T) 1_{[t, \infty)}(T) \\ &= \sigma S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) T + \sigma W_T \right) \\ &= \sigma S_T. \end{aligned}$$

En este ejemplo, el precio de la acción en T depende solamente del movimiento browniano en el periodo T . La derivada de Malliavin de S_T depende entonces de la derivada con respecto a W_T . Esto refleja el hecho de que una perturbación en la trayectoria del movimiento browniano desde t hacia adelante afecta S_T solamente a través del valor terminal W_T .

Caso multi-dimensional Supongamos ahora que $d > 1$, es decir, el movimiento browniano subyacente es multi-dimensional. La derivada de Malliavin de F en t es ahora un vector de dimensión $1 \times d$ denotado por $D_t F = (D_t^1 F, \dots, D_t^d F)$. La i -ésima coordenada de este vector, $D_t^i F$, captura el impacto de una perturbación en W^i , de tamaño ε a partir de un periodo t . Si $t_k \leq t < t_{k+1}$ tenemos

$$D_t^i F = \sum_{j=k}^n \partial_{ij} f(W_{t_1}, \dots, W_{t_k}, \dots, W_{t_n}) 1_{[t, \infty)}(t_j),$$

donde $\partial_{ij}f = \partial f(x)/\partial x_{ij}$ es la derivada con respecto al i -ésimo componente del j -ésimo argumento de f (es decir la derivada con respecto a $W_{t_j}^i$).

La derivada de Malliavin para variables aleatorias generales Como habíamos mencionado, la definición de derivada puede ser extendida para variables aleatorias que dependen de la trayectoria del movimiento browniano sobre un intervalo continuo $[0, T]$. Esta extensión usa el hecho de que un funcional que depende de la historia del movimiento browniano puede ser aproximado por una secuencia apropiada de funcionales brownianos suaves, en otras palabras, una función de una historia es aproximada por el límite de una secuencia de funciones, y cada elemento de esta secuencia es una función de un número contable de puntos de aquella historia. La derivada de Malliavin del funcional más general, es decir, dependiente de la historia completa, está dado por el límite de las derivadas de Malliavin de los funcionales brownianos suaves en la secuencia de aproximación. Obtenemos de esta forma

$$D_t F(W) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(W + \varepsilon 1_{[t, \infty)}) - F(W)}{\varepsilon}, \quad t \in [0, T]. \quad (1)$$

Nótese que podemos permitir que el índice t del operador de diferenciación tome valores sobre $[0, T]$, obteniendo de esta forma un proceso estocástico no necesariamente adaptado, es decir el operador de diferenciación de Malliavin D es un funcional sobre $L^2(\Omega)$, con valores en $L^2([0, T] \times \Omega)$ para el cual D_t no es necesariamente medible con respecto a $(\mathcal{F}_t)$, para todo $t \in [0, T]$. Sin embargo, esta nueva definición no funciona para cualquier proceso o funcional $F(\omega) \in L^2(\Omega)$. El espacio de las variables aleatorias en $L^2(\Omega)$ para las cuales las derivadas de Malliavin están bien definidas se denomina $\mathbb{D}^{1,2}$.

El espacio $\mathbb{D}^{1,2}$ Este espacio es el dominio del operador de diferenciación en el sentido de Malliavin en $L^2(\Omega)$ y se define como la completación (por lo tanto un conjunto denso) del conjunto de funcionales brownianos suaves con respecto a la norma

$$\|F\|_{1,2} = \left(E(F^2) + E \left(\int_0^T \|D_t F\|^2 dt \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $\|D_t F\|^2 = \sum_i (D_t^i F)^2$. Es en este espacio que la derivada de Malliavin de un funcional general es el límite de las derivadas de Malliavin de su respectiva secuencia aproximatoria por medio de funcionales brownianos suaves. Esto quiere decir que es prerequisite comprobar que una variable aleatoria pertenezca al espacio $\mathbb{D}^{1,2}$ antes de aplicar la derivada de Malliavin.

Derivadas de integrales de Riemann, Wiener e Itô La extensión de la definición de derivada de Malliavin para el caso general nos permite manejar, por ejemplo, integrales estocásticas que dependen de la historia de los movimientos brownianos sobre un intervalo continuo.

La derivada de la integral de Wiener Tomemos el caso de la integral estocástica de Wiener $F(\omega) = F(W(\omega)) = F(W) = \int_0^T h_t dW_t$, donde h_t es una función determinística del tiempo que pertenece a $L^2[0, T]$ y donde W es de dimensión uno. Como hemos mencionado, ω es una historia en el espacio de Wiener $\omega \in \Omega$. Estas variables aleatorias son gaussianas con media cero y desviación estándar $\|h\|_{L^2[0, T]}$.

Integrando por partes obtenemos

$$F(W) = \int_0^T h_t dW_t = h_T W_T - \int_0^T W_s dh_s.$$

Cálculos directos nos dan, para $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} F(W + \varepsilon 1_{[t, \infty)}) - F(W) &= h_T(W_T + \varepsilon 1_{[t, \infty)}(T)) - \int_0^T (W_s + \varepsilon 1_{[t, \infty)}(s)) dh_s \\ &\quad - \left(h_T W_T - \int_0^T W_s dh_s \right) \\ &= h_T \varepsilon - \int_0^T \varepsilon 1_{[t, \infty)}(s) dh_s \\ &= \varepsilon h_t. \end{aligned}$$

Esto implica, usando la definición de derivada de Malliavin (1) que $D_t F = h_t$, para $t \in [0, T]$. La derivada de Malliavin de F en t es la volatilidad h_t de la integral estocástica en t : esta volatilidad mide la sensibilidad de la variable aleatoria F a la innovación browniana en t . Por lo tanto definimos la derivada de Malliavin en este caso como $DF = h$, o $D_t F = h_t$.

En el caso multidimensional tenemos que la integral estocástica de Wiener

$$F(\omega) = \int_0^T h'_t dW_t$$

donde $h_t = h(t) = (h_1(t), \dots, h_d(t))'$ es una función del tiempo y W_t es de dimensión d . Tenemos que

$$\begin{aligned} D_t F(\omega) &= (D_{1t} F(\omega), \dots, D_{dt} F(\omega)) \\ &= (h_1(t), \dots, h_d(t)). \end{aligned} \tag{2}$$

Derivada de la integral de Riemann Ahora, consideremos una integral de Riemann aleatoria con un integrando que depende de la historia de movimientos brownianos. Este funcional browniano toma la forma $F(W) \equiv \int_0^T h_s(W)ds$ donde h_s ya no es determinístico sino un proceso medible progresivamente, o un proceso adaptado con historias *càdlàg*, (*continue à droite limite à gauche*, o rcll *right continuous left limits*, o continuas por la derecha con límites por la izquierda) tal que la integral existe, es decir $\int_0^T |h_s|ds < \infty$ con probabilidad uno. Tenemos

$$F(W + \varepsilon 1_{[t, \infty)}) - F(W) = \int_0^T (h_s(W + \varepsilon 1_{[t, \infty)}) - h_s(W))ds.$$

Ya que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (h_s(W + \varepsilon 1_{[t, \infty)}) - h_s(W))/\varepsilon = D_t h_s(W)$ se desprende que

$$\begin{aligned} D_t F &= D_t \int_0^T h_s(W)ds \\ &= \int_t^T D_t h_s(W)ds. \end{aligned}$$

En otros términos, podemos introducir el operador D_t dentro de la integral.

En el caso multidimensional, sea F una integral de Riemann con un integrando que depende de la trayectoria de un movimiento browniano W_t ,

$$F(\omega) = \int_0^T h_s(W)'ds,$$

con h_s un proceso adaptado $d \times 1$, tal que la integral existe. Tenemos que

$$D_t F(\omega) = (D_t^1 F(\omega), \dots, D_t^d F(\omega))$$

con

$$D_t^i F(\omega) = \int_t^T D_t^i h(s)ds, \quad i = 1, \dots, d$$

o en forma compacta

$$D_t F(\omega) = \int_t^T D_t h(s)ds. \quad (3)$$

Derivada de la integral de Itô Finalmente, consideremos la integral de Itô $F(\omega) = \int_0^T h_s(W)dW_s$. Para simplificar la notación, escribimos $h^\varepsilon \equiv h(W + \varepsilon 1_{[t, \infty)})$ y $W^\varepsilon \equiv W + \varepsilon 1_{[t, \infty)}$, por tanto $h^\varepsilon = h(W^\varepsilon)$. Obtenemos, para

$t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
F^\varepsilon - F &= \int_0^T h_s^\varepsilon dW_s^\varepsilon - \int_0^T h_s dW_s \\
&= \int_0^T (h_s^\varepsilon - h_s) dW_s + \int_0^T h_s^\varepsilon d(W_s^\varepsilon - W_s) \\
&= \int_t^T (h_s^\varepsilon - h_s) dW_s + h_t^\varepsilon (W_T^\varepsilon - W_T) \\
&\quad - \int_0^T (W_s^\varepsilon - W_s) dh_s^\varepsilon - \int_0^T d[W^\varepsilon - W, h^\varepsilon]_s \\
&= \int_t^T (h_s^\varepsilon - h_s) dW_s + h_t^\varepsilon \varepsilon - \varepsilon \int_t^T dh_s^\varepsilon \\
&= \int_t^T (h_s^\varepsilon - h_s) dW_s + \varepsilon h_t^\varepsilon.
\end{aligned}$$

En la segunda igualdad sumamos y restamos $\int_0^T h_s^\varepsilon dW_s$, la tercera igualdad usa $h_s^\varepsilon = h_s$ cuando $s < t$, para simplificar la primera integral y la fórmula de integración por partes del cálculo de Itô para expandir la segunda integral. La cuarta igualdad está basada en el hecho de que la variación cruzada es nula ($[W - W, h^\varepsilon]_T = 0$) porque $W_s^\varepsilon - W_s = \varepsilon 1_{[t, \infty)}(s)$ y $1_{[t, \infty)}(s)$ es de variación total acotada. Recordemos que la variación total de una función f es

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{t_n \in \Pi^N([0, t])} |f(t_{n+1}) - f(t_n)|$$

donde $\Pi^N([0, t])$ es una partición con N puntos sobre el intervalo $[0, t]$.

La última igualdad usa nuevamente la fórmula de integración por partes para simplificar los últimos dos términos. Como $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (h_s^\varepsilon - h_s)/\varepsilon = D_t h_s$ obtenemos

$$D_t F = h_t + \int_t^T D_t h_s dW_s$$

para $t \in [0, T]$.

Las derivadas de Malliavin de integrales de Itô dependientes de movimientos brownianos multidimensionales pueden ser definidas de una forma similar. En este caso, la derivada de Malliavin es un proceso de dimensión d que puede ser definido componente por componente, mediante las mismas operaciones descritas anteriormente.

Sea h_s un proceso $\mathcal{F}_s$ -medible con valores en $\mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_0^T h_s(W)' dW_s \\ &= \int_0^T h'_s dW_s. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} D_t F(\omega) &= D_t \int_0^T h'_s dW_s \\ &= \int_0^T (D_t h'_s) dW_s + h_t \\ &= \int_t^T (D_t h'_s) dW_s + h_t \\ &= \int_t^T (D_t h_s)' dW_s + h_t \end{aligned} \tag{4}$$

2.1.2 La integral de Skorokhod y la fórmula de integración por partes

El cálculo de Malliavin tiene dos objetos básicos que son la derivada de Malliavin y la integral de Skorokhod. El vínculo entre ambos viene dada por la relación de dualidad que tiene como consecuencia la fórmula de integración por partes, una de las herramientas más importante del cálculo de Malliavin.

Definimos δ como el operador de divergencia abstracto que mapea procesos no necesariamente adaptados en $L^2([0, T] \times \Omega)$ a variables aleatorias en $L^2(\Omega)$. Cuando U es un proceso adaptado, el operador de divergencia coincide con la integral de Itô estándar $\delta[U] = \int_0^T U_t dW_t$ y por lo tanto δ puede ser visto como una generalización de la integral de Itô estándar a procesos no adaptados que se conoce con el nombre de la integral de Skorokhod.

Como mencionamos anteriormente, $D_t F$ es un proceso estocástico no necesariamente adaptado a la filtración browniana. Tomemos cualquier proceso estocástico $U_t = U(t, \omega) \in L^2([0, T] \times \Omega)$. Suponemos que tanto U como DF están en $L^2[0, T]$ para ω fijo. Escribimos

$$\langle U, DG \rangle = \int_0^T U_t \cdot D_t F dt$$

para el producto interior estándar en $L^2[0, T]$ y notamos que esta expresión aún es estocástica: $\langle U, DG \rangle = \langle U, DG \rangle(\omega)$. Integrando sobre ω obtenemos

la expresión $E\langle U, DG \rangle$. Definimos δ como la adjunta de D , es decir aquel operador que hace que se cumpla la relación de dualidad en el espacio de Wiener

$$E(\langle U, DF \rangle) = E(\delta(U)F)$$

cuyos elementos están definidos sobre los subespacios apropiados, en el caso de la derivada $D : L^2(\Omega) \rightarrow L^2([0, T] \times \Omega)$ mientras que $\delta : L^2([0, T] \times \Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$.

En forma análoga al operador de diferenciación, la integral de Skorokhod no está bien definida para cualquier proceso estocástico. El dominio de δ es el conjunto de procesos $U \in L^2([0, T] \times \Omega)$ tal que

$$\left| E \left[\int_0^T U_t D_t F dt \right] \right| \leq c \|F\|_2$$

para todo $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, donde c es una constante que depende de U . Si U pertenece al dominio de δ , entonces $\delta(U)$ es el elemento de $L^2(\Omega)$ caracterizado por la relación de dualidad

$$E[F\delta(U)] = E \left[\int_0^T U_t D_t F dt \right],$$

para cualquier $F \in \mathbb{D}^{1,2}$.

Reescribimos la integral de Skorokhod como

$$\delta(U) = \int_0^T U(t, \omega) \delta W_t$$

y obtenemos a partir de la relación de dualidad

$$E \left(\int_0^T U_t \cdot D_t F dt \right) = E \left(\int_0^T U_t \delta W_t \cdot F \right) \quad (5)$$

Esta última relación se denomina “integración por partes en el espacio de Wiener”. El operador δ está íntimamente relacionado a la integral estocástica de Itô: si U es $\mathcal{F}_t$ -adaptado:

$$\int_0^T U(t, \omega) \delta W_t = \int_0^T U(t, \omega) dW_t$$

Algunas veces se denomina a D y δ , respectivamente, el gradiente y el operador de divergencia sobre el espacio de Wiener.

2.1.3 La representación de martingalas y la fórmula de Clark-Ocone

En los espacios de Wiener, las martingalas con variancias finitas pueden ser escritas como sumas de incrementos brownianos. En otras palabras $M_t = M_0 + \int_0^t \phi_s dW_s$ para un proceso medible progresivamente ϕ , que representa el coeficiente de volatilidad de la martingala. Este resultado es conocido como el teorema de representación por martingalas. Uno de los más importantes beneficios del cálculo de Malliavin es que identifica el integrando ϕ en esta representación. Esta es la utilidad de la fórmula Clark-Ocone.

La fórmula Clark-Ocone dice que cualquier variable aleatoria $F \in \mathbb{D}^{1,2}$ puede ser descompuesta como

$$\begin{aligned} F &= E[F] + \int_0^T E[D_t F | \mathcal{F}_t] dW_t \\ &= E[F] + \sum_{i=1}^d \int_0^T E[D_t^i F | \mathcal{F}_t] dW_t^i \end{aligned} \quad (6)$$

donde $E[\cdot | \mathcal{F}_t] = E_t[\cdot]$ es la expectativa condicional en t dada la información generada por los movimientos brownianos W . Para una martingala cerrada por $F \in \mathbb{D}^{1,2}$, es decir $M_t = E_t[F]$, podemos aplicar expectativas condicionales a F para obtener $M_t = E[F] + \int_0^t E_s[D_s F] dW_s$.

El esquema de la derivación de esta fórmula es como sigue. Asumimos que $F \in \mathbb{D}^{1,2}$. Usando el teorema de representación de martingalas tenemos $F = E[F] + \int_0^T \phi_s dW_s$. Tomando la derivada de Malliavin en cada lado, y aplicando las reglas del cálculo de Malliavin descritas anteriormente, obtenemos $D_t F = \phi_t + \int_t^T D_t \phi_s dW_s$. Tomando expectativas condicionales en cada lado nos da $E_t[D_t F] = \phi_t$, ya que $E_t \left[\int_t^T D_t \phi_s dW_s \right] = 0$ y ϕ_t es conocido en t . Sustituyendo esta expresión en la representación de F obtenemos el resultado.

2.1.4 Conmutatividad de D_t y E_t

Las derivaciones de la fórmula de Clark y Ocone muestran también que la derivada de Malliavin y el operador de expectativas condicionales son conmutables. De hecho, sea $v \geq t$ y consideremos la martingala M cerrada por

$F \in \mathbb{D}^{1,2}$. A partir de las representaciones anteriores para M y F obtenemos

$$\begin{aligned} D_t M_v &= D_t E_v[F] = D_t(E[F|\mathcal{F}_v]) \\ &= D_t \left(E[F] + \int_0^v E_s[D_s F] dW_s \right) \\ &= D_t E_t[F] + \int_t^v D_t E_s[D_s F] dW_s, \end{aligned}$$

donde hemos usado $D_t F = 0$ para $v < t$ y la derivada de una integral de Itô. En forma similar

$$\begin{aligned} D_t F &= D_t \left(E[F] + \int_0^T E_t[D_t F] dW_t \right) \\ &= D_t E_t[F] + \int_t^T D_t E_s[D_s F] dW_s. \end{aligned}$$

Tomando la expectativa condicional en el momento $v \geq t$ de la última expresión obtenemos

$$E_v[D_t F] = D_t E_t[F] + \int_t^v D_t E_s[D_s F] dW_s.$$

Ya que las fórmulas en el lado derecho de $D_t M_v$ y $E_v[D_t F]$ coinciden podemos concluir que $D_t M_v = E_v[D_t F]$. Usando la definición de M_v también podemos escribir

$$D_t E_v[F] = E_v[D_t F] \quad (7)$$

lo que quiere decir que el operador de la derivada de Malliavin y el de la expectativa condicional son conmutables.

2.1.5 Derivada de Malliavin de un proceso adaptado

Sea $U_s(W)$ un proceso $\mathcal{F}_s$ -adaptado y supongamos que $U_s(\cdot) \in \mathbb{D}^{1,2}$. Entonces $D_t U_s(W)$ es $\mathcal{F}_s$ -adaptado para todo t y

$$D_t U_s(W) = 0 \text{ para } t > s. \quad (8)$$

Esto es una consecuencia de la conmutatividad de la derivada de Malliavin y la esperanza condicional, ya que

$$D_t U_s(W) = D_t(E_s[U_s(W)]) = E_s[D_t U_s(W)] \cdot 1_{[0,s]}(t)$$

donde $1_{[0,s]}(t) = 0$, comprobándose el resultado.

2.1.6 La regla de la cadena del cálculo de Malliavin

En la práctica muchas veces necesitamos calcular la derivada de Malliavin de una función de una variable aleatoria que depende de la historia. Como en el cálculo ordinario, la regla de la cadena también es aplicable en el cálculo de Malliavin. Sea $F = (F_1, \dots, F_m)$ un vector de variables aleatorias cuyos componentes pertenecen al espacio $\mathbb{D}^{1,2}$ y supongamos que $\phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continuamente diferenciable de F con derivadas acotadas (este último supuesto se puede relajar en algunas situaciones). Por lo tanto $\phi(F) \in \mathbb{D}^{1,2}$ y la derivada de Malliavin de $\phi(F)$ es entonces

$$D_t \phi(F) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} \phi(F) \cdot D_t F_i, \quad (9)$$

donde $\frac{\partial \phi}{\partial x_i}(F)$ representa la derivada con respecto al i -ésimo argumento de ϕ . Nótese que $\partial \phi(F)/\partial x_i$ es un escalar, mientras que $D_t F_i = (D_t^1 F_i, \dots, D_t^d F_i)$ es un vector.

Por ejemplo, en el caso de las integrales de Itô $F(W) = \int_0^T h_t dW_t$, y $\phi = \phi(F)$ obtenemos

$$D\phi = D[\phi(F)] = \phi'(F)DF = \phi'(F)h$$

o

$$D_t \phi(\omega) = \phi'(F(\omega))h_t.$$

Para cualquier ω el lado derecho pertenece a $L^2[0, T]$. Podemos considerar a $D\phi$ como una variable aleatoria con valores en $L^2[0, T]$. Alternativamente podemos considerarla como función de (t, ω) y en este caso es un proceso estocástico. Escribimos el supuesto de segundos momentos finitos en este último caso como

$$D\phi = D_t \phi(\omega) \in L^2([0, T] \times \Omega).$$

En el caso de los funcionales brownianos suaves la regla de la cadena es particularmente simple, por ejemplo cuando $s \in (0, T]$ es fijo y $\phi(W) = W_s^2$ para s fijo, obtenemos $D_t G = 2W_s 1_{t \leq s}$ usando resultados previos.

2.1.7 La regla del producto

Esta regla es corolario de la regla de la cadena aplicada a la función

$$f(x, y) = x \cdot y.$$

Obtenemos para $X, Y \in \mathbb{D}^{1,2}$

$$\begin{aligned} D_t(X \cdot Y) &= \frac{\partial f(X, Y)}{\partial x} D_t X + \frac{\partial f(X, Y)}{\partial y} D_t Y \\ &= Y \cdot D_t X + X \cdot D_t Y. \end{aligned} \quad (10)$$

2.1.8 Derivadas de Malliavin de ecuaciones diferenciales estocásticas

Para aplicaciones en finanzas es esencial calcular la derivada de Malliavin de la solución de una ecuación diferencial estocástica (EDE) o en otras palabras un proceso de difusión. Los resultados del cálculo de Malliavin presentados anteriormente pueden ser usados para este propósito.

Veamos primero el caso de procesos de difusión que dependen de un movimiento browniano unidimensional. Supongamos que una variable de estado X_t sigue el proceso de difusión $dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ donde X_0 está dado y $\sigma(X_t)$ es un escalar, o sea W es uni-dimensional. Como es usual, se asume que las funciones μ y σ son medibles y permiten la existencia de las soluciones a la EDE. Adicionalmente, si asumimos que estas funciones son continuamente diferenciables y que las respectivas derivadas son acotadas (como mencionamos anteriormente este último supuesto se puede relajar algunas veces), el proceso X pertenecerá al dominio del operador de diferenciación, el conjunto $\mathbb{D}^{1,2}$, y por lo tanto la derivada de Malliavin estará bien definida.

Podemos escribir el proceso X en forma integral como

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s.$$

Usando los resultados previos sobre las derivadas de Malliavin de integrales de m , de Itô y la regla de la cadena, podemos verificar que la derivada de Malliavin $D_t X_s$ cumple

$$D_t X_s = D_t X_0 + \int_t^s \partial\mu(X_v)D_t X_v dv + \int_t^s \partial\sigma(X_v)D_t X_v dW_v + \sigma(X_t),$$

donde $\partial\mu$, $\partial\sigma$ denotan las derivadas parciales con respecto a sus argumentos. Como $D_t X_0 = 0$, la derivada de Malliavin cumple la siguiente EDE lineal

$$d(D_t X_s) = [\partial\mu(X_s)ds + \partial\sigma(X_s)dW_s](D_t X_s)$$

para $t \leq s$, sujeta a la condición inicial $\lim_{s \rightarrow t} D_t X_s = \sigma(X_t)$.

Veamos ahora un caso más general. Si X y $\mu(t, X_t)$ son vectores $m \times 1$, $\sigma(t, X_t)$ es una matriz $m \times d$ (W es un movimiento browniano de dimensión d), $t \in [0, T]$, definimos X como la solución de la EDE

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(s, X_s)ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t \sigma_j(s, X_s)dW_s^j,$$

donde X_0 está dado, $\sigma_j, \mu : [0, T] \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, para $1 \leq j \leq d$ son funciones medibles y σ_j denota la j -ésima columna de σ . Nuevamente asumimos que las funciones σ y μ satisfacen las condiciones apropiadas para la existencia de las soluciones a la EDE.

Ahora, si X es la solución de esta EDE y sus coeficientes $\sigma_j^i, \mu^i, i = 1, \dots, m$, son funciones continuamente diferenciables con derivadas acotadas, entonces X_t pertenece a $\mathbb{D}^{1,2}$ para todo $t \in [0, T]$. Utilizando los mismos argumentos que en el caso unidimensional, encontramos que las derivadas satisfacen las $m \times d$ EDEs

$$\begin{aligned} D_t^j X_s^i &= \sigma_j^i(t, X_t) + \sum_{k=1}^d \int_t^s (\partial_k \mu^i)(v, X_v) D_t^j X_v^k dv \\ &\quad + \sum_{k,l=1}^d \int_t^s \partial_k \sigma_l^i(v, X_v) D_t^j X_v^k dW_v^l \end{aligned}$$

para $j = 1, \dots, d, i = 1, \dots, m$. Estas EDEs pueden ser re-escritas en forma diferencial y los resultados puestos en forma vectorial

$$d(D_t X_s) = \left[\partial \mu(s, X_s) ds + \sum_{j=1}^d \partial \sigma_j(s, X_s) dW_s^j \right] (D_t X_s) \quad (11)$$

para $t \leq s$, sujeto a la condición inicial $\lim_{s \rightarrow t} D_t X_s = \sigma(X_t)$. La derivada de Malliavin $D_t X_s$ es la matriz de tamaño $m \times d$ con elementos $D_t X_s = (D_t^1 X_s, \dots, D_t^d X_s)$, donde $D_t^j X_s = (D_t^j X_s^1, \dots, D_t^j X_s^m)'$, $j = 1, \dots, d$.

2.1.9 El proceso de primeras variaciones

La derivada de Malliavin de un proceso de Itô puede ser representada en términos del proceso de primeras variaciones. Si X es un proceso de Itô m -dimensional cuya dinámica está dada por la EDE

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,$$

donde μ y σ son funciones continuamente diferenciables con derivadas acotadas y $X_0 = x$ dado, entonces X pertenece a $\mathbb{D}^{1,2}$. Llamamos a Y el proceso de primeras variaciones asociado a X y lo definimos con la EDE

$$\begin{aligned} dY_t &= \partial \mu(X_t) Y_t dt + \sum_{j=1}^d \partial \sigma_j(X_t) Y_t dW_t^j, \\ Y_0 &= I_m, \end{aligned}$$

donde I_m es la matriz identidad de tamaño $m \times m$. Se le llama proceso de primeras variaciones porque mide el cambio en X ante perturbaciones en sus valores iniciales

$$Y_t = \frac{\partial X_t}{\partial x}. \quad (12)$$

La derivada de Malliavin de X está dada entonces por

$$D_t X_s = Y_s Y_t^{-1} \sigma(X_t) 1_{t \leq s}, \quad (13)$$

para $t \geq 0$.

Verificamos este resultado como sigue. Diferenciando en el sentido de Malliavin la dinámica de X con (4) y (3) o simplemente (11):

$$\begin{aligned} D_t X_s &= D_t \left(\int_0^s \mu(X_u) du \right) + D_t \left(\int_0^s \sigma(X_u) dW_u \right) \\ &= \sigma(X_t) + \int_t^s D_t \mu(X_u) du + \int_t^s D_t \sigma(X_u) dW_u, \end{aligned}$$

y por la regla de la cadena (9)

$$D_t X_s = \sigma(X_t) + \int_t^s \partial \mu(X_u) D_t X_u du + \int_t^s \partial \sigma(X_u) D_t X_u dW_u.$$

Denotamos $Z_s = D_t X_s$, entonces el proceso Z satisface la EDE

$$Z_s = Z_t + \int_t^s \partial \mu(X_u) Z_u du + \int_t^s \partial \sigma(X_u) Z_u dW_u, \quad s \geq t$$

con $Z_t = \sigma(X_t)$. Los procesos Z e Y satisfacen las mismas ecuaciones diferenciales estocásticas, pero con condiciones iniciales diferentes. Por otra parte, como X es adaptado, $Z_s = 0$ para $s < t$. Existe por lo tanto una constante φ tal que $Z_s = \varphi Y_s 1_{s \geq t}$. Esta constante se determina usando las condiciones iniciales en t obteniéndose $\varphi = Y_t^{-1} \sigma(X_t)$, y de donde se desprende (13).

La regla de la cadena (9), puede ser re-escrita en términos del proceso de primeras variaciones. Tenemos que si ϕ es una función en $\mathbb{R}^m$, continuamente diferenciable con derivadas acotadas entonces

$$D_t \phi(X_s) = \partial \phi(X_s) Y_s Y_t^{-1} \sigma(X_t) 1_{t \leq s},$$

y también

$$D_t \int_0^s \phi(X_u) du = \int_t^s \partial \phi(X_u) Y_u Y_t^{-1} \sigma(X_t) du,$$

Ejemplo: el modelo Black-Scholes En el caso de la difusión del tipo encontrado en el precio de las acciones en el modelo Black-Scholes tenemos

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

para $t \in [0, T]$ con $S_0 = s$ dado. El proceso de primeras variaciones viene dado por

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

para $t \in [0, T]$ con $Y_0 = 1$, y entonces

$$Y_t = \frac{S_t}{s}, \text{ } P\text{-c.s.}$$

donde $P\text{-c.s.}$ significa P -casi seguramente (o $P\text{-a.s.}$, $P\text{-almost surely}$).

Por lo tanto $D_t S_T = S_T S_t^{-1} (\sigma S_t) \cdot 1_{t \leq T} = \sigma S_T \cdot 1_{t \leq T}$, resultado que coincide con el dado anteriormente.

2.1.10 La fórmula de Bismut-Elworthy-Li

Tomemos la EDE

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

$t \in [0, T]$, con $x = X_0$ la condición inicial. Sea ϕ una función en $L^2(\Omega)$ continuamente diferenciable, con derivadas acotadas y sea Y el proceso de primeras variaciones de X , asumimos que ambos pertenecen a $\mathbb{D}^{1,2}$. Como consecuencia del teorema de convergencia dominada, y el de Taylor y Lagrange tenemos que el operador de diferenciación es conmutable con el de la esperanza

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E_x[\phi(X_T)] &= E_x \left[\frac{\partial}{\partial x} (\phi(X_T)) \right] \\ &= E_x \left[\partial \phi(X_T) \frac{\partial X_T}{\partial x} \right] \\ &= E_x [\partial \phi(X_T) Y_T]. \end{aligned} \tag{14}$$

donde la segunda línea se obtiene de la regla de la cadena (9) y la tercera de la definición del proceso de primeras variaciones (12).

Asimismo por (13),

$$\partial \phi(X_T) Y_T = D_t \phi(X_T) \sigma(X_t)^{-1} Y_t \cdot 1_{t \leq T}$$

o también integrando sobre $t \in [0, T]$ y notando que el lado izquierdo no depende de t

$$\partial\phi(X_T)Y_T = \frac{1}{T} \int_0^T D_s\phi(X_T)\sigma(X_t)^{-1}Y_t dt$$

tomamos esperanzas y aplicamos la fórmula de integración por partes (5) al lado derecho, asumiendo que $(\sigma(X_t)^{-1}Y_t)'$ pertenece al dominio de la integral de Skorokhod δ

$$\begin{aligned} E_x [\partial\phi(X_T)Y_T] &= E_x \left[\frac{1}{T} \int_0^T D_s\phi(X_T)\sigma(X_t)^{-1}Y_t dt \right] \\ &= E_x \left[\phi(X_T) \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (\sigma(X_t)^{-1}Y_t)' \delta W_t \right] \\ &= E_x \left[\phi(X_T) \cdot \frac{1}{T} \int_0^T (\sigma(X_t)^{-1}Y_t)' dW_t \right] \end{aligned}$$

donde la tercera igualdad se desprende del hecho de que $(\sigma(X_t)^{-1}Y_t)'$ es $\mathcal{F}_t$ -adaptado.

Usando (14) obtenemos la fórmula de Bismut-Elworthy-Li

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x[\phi(X_T)] = \frac{1}{T} E_x \left[\phi(X_T) \int_0^T (\sigma(X_t)^{-1}Y_t)' dW_t \right] \quad (15)$$

que nos dice que las derivadas de las expectativas de ϕ pueden ser calculadas como una esperanza ponderada de ϕ ,

$$\frac{\partial}{\partial x} E_x[\phi(X_T)] = E_x [\phi(X_T)\pi]$$

donde las ponderaciones vienen dadas por

$$\pi = \frac{1}{T} \int_0^T (\sigma(X_t)^{-1}Y_t)' dW_t.$$

Esta fórmula resulta de gran utilidad para el cálculo de las sensibilidades de contratos contingentes, también llamados griegos, por métodos de Monte Carlo.

2.2 Algunas aplicaciones a las finanzas

Reseñamos dos aplicaciones del cálculo de Malliavin a las finanzas, la primera para el cálculo de los “griegos” de contratos contingentes, tales como las opciones, y la segunda, para el cálculo de esperanzas condicionales.

En la primera presentamos una técnica para el cálculo de las sensibilidades del precio de una opción con respecto a sus diferentes parámetros, también llamados griegos. El resultado fundamental del enfoque del cálculo de Malliavin es que permite estimar los griegos por el método de Monte Carlo, no por diferencias finitas como es generalmente el caso, sino por una sola esperanza: la del pago del producto multiplicada por un peso independiente del pago.

En la segunda parte se plantea utilizar el cálculo de Malliavin para obtener una nueva representación de las expectativas condicionales, que como es conocido, tiene aplicaciones en la valuación y cobertura de contratos contingentes.

2.2.1 Cálculo del delta de contratos contingentes

Nos ocupamos a continuación de una de las primeras aplicaciones del cálculo de Malliavin a las finanzas que aparecieron en la literatura: el cálculo de los “griegos” por simulación de Monte-Carlo, como por ejemplo en Fournié et. al. (1999), Kohatsu-Higa (2001, 2003) y Benhamou (2002). Discutimos solamente el caso más simple aquí para resaltar las ideas principales. En el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ soportando un movimiento browniano unidimensional $W = (W_t)_{t \geq 0}$, sea $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la aumentación de la filtración generada por W . Sea X_t la solución de la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

con condición inicial $X_0 = x$, donde se asume que las funciones $\mu : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tienen primeras derivadas continuas y acotadas, y σ está acotado desde abajo por una constante positiva. Para una función g , estamos interesados en calcular la derivada

$$\Delta = \frac{\partial}{\partial x} E[g(X_T)].$$

Cuando el proceso $X = (X_t)_{t \geq 0}$ es el precio de una acción, Δ es la sensibilidad del precio de una contrato contingente con pago $g(X_T)$ con respecto al precio actual de la acción. En la teoría Black-Scholes-Merton, esta cantidad, llamada el “delta” es el monto de la acción que un inversionista debe poseer a fin de replicar el pago de la opción.

Una complicación en el cálculo del delta es que el precio de la opción $E[g(X_T)]$ raramente está disponible como una función explícita de x . En la práctica, a menudo aproximamos el precio de la opción por simulaciones de Monte-Carlo. Este método consiste en generar N copias independientes $X_T^{(n)}$ de X_T para calcular el promedio empírico

$$E[g(X_T)] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g(X_T^{(n)})$$

que converge al verdadero precio de la opción cuando $N \rightarrow \infty$. Desafortunadamente, el error de aproximación decae a una tasa $N^{-1/2}$, una velocidad demasiado lenta como para implementar la diferencia finita

$$\Delta \approx \frac{1}{\epsilon N} \sum_{n=1}^N \left[g \left(X_T^{x+\epsilon, (n)} \right) - g \left(X_T^{x, (n)} \right) \right],$$

para un parámetro pequeño ϵ , donde $X_T^{x, (n)}$ denota la n -ésima réplica de Montecarlo de X_T , con $X_0 = x$.

El problema es que la diferencia $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left[g \left(X_T^{x+\epsilon, (n)} \right) - g \left(X_T^{x, (n)} \right) \right]$ puede no ser pequeña, aún si ϵ lo es, porque el error de Monte Carlo puede que no sea pequeño. Esta dificultad es especialmente pronunciada si la función g es discontinua, y este es el caso de ciertas opciones como por ejemplo las opciones digitales.

Afortunadamente, la fórmula de Bismut-Elworthy-Li (15), que como hemos visto es un corolario de la fórmula de integración por partes, nos proporciona una variable aleatoria explícita π , que depende de la dinámica de X , pero no de la función de pago g , tal que

$$\Delta = E \left[g(X_T) \pi \right].$$

Esta expresión nos conduce a la aproximación de Monte-Carlo mejorada

$$\Delta \approx \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N g \left(X_T^{(n)} \right) \pi^{(n)}$$

cuyo error de aproximación decae a una tasa $N^{-1/2}$, igual que para el precio de la opción.

Hemos derivado este resultado, para el caso sencillo que g es diferenciable, y con derivadas acotadas. Sin embargo, la fórmula de Bismut-Elworthy-Li se puede extender para cualquier función de pago g en $L^2(\Omega)$, es decir no necesariamente continua ni con derivadas acotadas pero con segundos momentos finitos, mediante la desigualdad de Cauchy-Schwartz.

Como hemos visto, (15) nos da una expresión explícita para los pesos π

$$\pi = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma(X_t)^{-1} Y_t dW_t.$$

No hay ningún impedimento para la aplicación de este método cuando X es una difusión de dimensión finita d , $d > 1$ bajo una condición de elipticidad en el término de difusión σ , siempre y cuando esta última sea invertible.

Ejemplo: el modelo Black-Scholes Consideremos una opción europea con pago $\phi(S_T)$, donde

$$dS_t/S_t = r_t dt + \sigma_t dW_t, S_0 = x.$$

con tasa libre de riesgo y volatilidad determinísticos, posiblemente dependientes en el tiempo. Asumimos $\inf \sigma_t > 0$. Enfoquémonos en x , el precio spot. Para denotar $S_0 = x$ podemos escribir también $S_t = S_t^x$. Definimos el proceso de primeras variaciones $Y_t = \partial S_t^x / \partial x$. Como

$$S_t^x = x \exp \left(\int_0^t \sigma_s dW_s + \int_0^t \left(r_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds \right),$$

como antes, obtenemos con (13)

$$Y_t = \frac{S_t}{x}, 0 \leq t \leq T.$$

Aplicando la fórmula de Bismut-Elworthy-Li (15), con $\sigma(S_t) = \sigma_t S_t$ tenemos que un posible peso de ponderación π está dado por la integral estocástica $\delta[u] = \int_0^T u_t \delta W_t$ donde

$$u_t = \frac{Y_t}{T \sigma_t S_t} = \frac{1}{T x \sigma_t}.$$

Por lo tanto como u_t es $\mathcal{F}_t$ -adaptado

$$\pi = \frac{1}{T x} \int_0^T \frac{dW_t}{\sigma_t}.$$

En el caso del modelo Black-Scholes con volatilidad constante σ_{BS} tenemos

$$\pi_{BS} = \frac{W_T}{T x \sigma_{BS}}$$

Luego con r y σ_{BS} constantes tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} E \left[e^{-rT} \phi(S_T^x) \right] = E \left[e^{-rT} \phi(S_T^x) \frac{W_T}{x \sigma_{BS} T} \right].$$

2.2.2 Cálculo de expectativas condicionales

En Fournié et. al. (2001), se presentó la aplicación del cálculo de Malliavin para el cómputo de expectativas condicionales. Consideremos el problema de calcular $E[g(X_T) | X_t = x]$ por simulación de Monte-Carlo, donde x es un número real y $X = (X_t)_{t \geq 0}$ es un proceso con valores reales tal que la

distribución de la variable aleatoria X_t es continua. Podemos pensar en simular muchas realizaciones del proceso, y descartar todas las trayectorias excepto aquellas tales que $X_t = x$. Pero dado que la distribución de X_t es continua, con probabilidad uno nos veremos forzados a desechar todas las realizaciones del proceso. ¿Qué hacer entonces? en otro caso ¿cómo simular por Monte Carlo en el caso $E[g(X_T)|X_t \neq x]$?

Alternativamente, podemos pensar en el evento $\{X_t = x\}$ como una condición inicial, y por lo tanto debemos realizar una nueva simulación de Monte Carlo para cada x deseado. La ventaja del enfoque de Malliavin es que en este caso, podemos obtener las esperanzas condicionales para x arbitrario, con una sola simulación. Esto proporciona un ahorro significativo de tiempo computacional, lo que no sólo hace más eficiente el proceso de valuación, sino que permite que el enfoque de Monte Carlo sea viable para ciertos contratos contingentes complejos.

Sean ξ y η variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, y supongamos que la distribución de η es continua. La idea intuitiva es interpretar la expectativa condicional $E[\xi|\eta = 0]$ como

$$E[\xi|\eta = 0] = \frac{E[\xi\delta(\eta)]}{E[\delta(\eta)]}$$

donde $\delta(x)$ denota aquí la función delta Dirac. La expresión anterior es heurística, pero puede justificarse con un argumento límite estándar basado en:

$$E[\xi|\eta = 0] = \lim_{\epsilon \searrow 0} \frac{E[\xi 1_{(-\epsilon, \epsilon)}(\eta)]}{E[1_{(-\epsilon, \epsilon)}(\eta)]}.$$

A fin de usar el cálculo de Malliavin, asumimos que el sigma-álgebra $\mathcal{F}$ es la compleción del sigma-álgebra browniano y $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtración generada por un movimiento browniano unidimensional $(W_t)_{t \geq 0}$ definido sobre $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Denotemos con D la derivada de Malliavin con respecto al proceso de Wiener, y supongamos que ξ y η están en $\mathbb{D}^{1,2}$.

Como la función delta $\delta(x)$ es la derivada de la función unitaria de Heaviside definida con $H(x) = 1_{\{x > 0\}}$ y

$$H(x) = \int_{-\infty}^x \delta(u) du,$$

podemos sustituir $\delta(x) = \partial H(x)/\partial x$, y usando la regla de la cadena (9) con $DH(\eta)$

$$D_s H(\eta) = \partial H \cdot D_s \eta$$

obtenemos la expresión

$$\delta(\eta) = D_s 1_{\{\eta > 0\}} (D_s \eta)^{-1}$$

para todo $s \in [0, T]$ tal que $D_s \eta \neq 0$.

En aplicaciones típicas, hay un $t \in (0, T]$ tal que η es $\mathcal{F}_t$ -medible; es decir, tenemos $D_s \eta = 0$ para todo $s \in (t, T]$. Asumimos entonces que $D_s \eta \neq 0$ para casi todo $(\omega, s) \in \Omega \times [0, t]$. Integrando la expresión anterior

$$\delta(\eta) = \frac{1}{t} \int_0^t D_s 1_{\{\eta > 0\}} (D_s \eta)^{-1} ds.$$

Por la fórmula de integración por partes (5) tenemos

$$\begin{aligned} E [\xi \delta(\eta)] &= E \left[\frac{1}{t} \int_0^t \xi (D_s \eta)^{-1} D_s 1_{\{\eta > 0\}} ds \right] \\ &= E \left[1_{\{\eta > 0\}} \frac{1}{t} \int_0^t \xi (D_s \eta)^{-1} \delta W_s \right] \end{aligned}$$

donde la integral estocástica δ es en el sentido de Skorokhod ya que el integrando es usualmente no adaptado. Combinando las fórmulas anteriores tenemos

$$E [\xi | \eta = 0] = \frac{E \left[1_{\{\eta > 0\}} \frac{1}{t} \int_0^t \xi (D_s \eta)^{-1} \delta W_s \right]}{E \left[1_{\{\eta > 0\}} \frac{1}{t} \int_0^t (D_s \eta)^{-1} \delta W_s \right]}.$$

Apliquemos ahora esta fórmula a la solución de una ecuación diferencial estocástica. Sea $X = (X_t)_{t \geq 0}$ el proceso que resuelve la EDE

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

con condición inicial $X_0 = x$. Tenemos $D_s X_t = Y_t Y_s^{-1} \sigma(X_s)$ para $s \in [0, t]$. Reemplazando $\xi = g(X_T)$ y $\eta = X_t - x$ en las fórmulas anteriores tenemos

$$E [g(X_T) | X_t = x] = \frac{E \left[1_{\{X_t > x\}} \frac{1}{t} \int_0^t g(X_T) \sigma(X_s)^{-1} Y_s Y_t^{-1} \delta W_s \right]}{E \left[1_{\{X_t > x\}} \frac{1}{t} \int_0^t \sigma(X_s)^{-1} Y_s Y_t^{-1} \delta W_s \right]}.$$

La fórmula anterior aún no es satisfactoria con fines de cálculos computacionales debido a que la integral de Skorokhod es difícil de calcular. Mediante una integración por partes, las integrales de Skorokhod en la fórmula pueden ser re-expresadas en términos de integrales de Itô, ya que $Y_s \sigma(X_s)^{-1}$

es $\mathcal{F}_s$ -adaptado:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t} \int_0^t g(X_T) \sigma(X_s)^{-1} Y_s Y_t^{-1} \delta W_s &= g(X_T) Y_t^{-1} \int_0^t Y_s \sigma(X_s)^{-1} \delta W_s \\
&\quad - \int_0^t D_s(g(X_T) Y_t^{-1}) Y_s \sigma(X_s)^{-1} ds \\
&= g(X_T) Y_t^{-1} \int_0^t Y_s \sigma(X_s)^{-1} dW_s \\
&\quad - \int_0^t D_s(g(X_T) Y_t^{-1}) Y_s \sigma(X_s)^{-1} ds.
\end{aligned}$$

Como $D_s(g(X_T) Y_t^{-1}) = g'(X_T) Y_T Y_s^{-1} \sigma(X_s) Y_t^{-1} - g(X_T) D_s Y_t^{-1}$ el componente final está dado por la fórmula

$$D_s Y_t^{-1} = \sigma(X_s) Y_s^{-2} Y_t^{-2} (Z_s Y_t - Z_t Y_s) - Y_t^{-1} \sigma'(X_s)$$

donde $Z = (Z_t)_{t \geq 0}$ es el proceso de segundas variaciones dado por la EDE

$$dZ_t = (\partial \sigma(X_t) Z_t + \partial^2 \sigma(X_t) Y_t^2) dW_t + (\partial \mu(X_t) Z_t + \partial^2 \mu(X_t) Y_t^2) dt$$

con $Z_0 = 0$. Así como entendemos a la primera variación $Y_t = dX_t/dx$ como la derivada de la solución de la EDE con respecto a su condición inicial, entendemos a la segunda variación de $Z_t = d^2 X_t/dx^2$ como la segunda derivada.

3 El cálculo de Malliavin en la teoría intertemporal del portafolio

En la teoría dinámica del portafolio, la relevancia del cálculo de Malliavin viene dada por la fórmula de Clark-Ocone. La idea básica es que en el enfoque de martingalas, a ser presentado más abajo, la estrategia de portafolio viene dada por una integral estocástica que no tiene solución en el caso general. La idea de este enfoque surgió en un contexto de valuación por ausencia de arbitraje, donde las estrategias de replicación de contratos contingentes son dadas por una integral de Itô luego del cambio de medida prescrito por el teorema de Girsanov. Las estrategias de portafolio y las de replicación de contratos contingentes pueden ser caracterizadas tanto en forma cerrada como también con simulaciones de Monte Carlo justamente empleando la fórmula de Clark-Ocone del cálculo de Malliavin.

A continuación presentamos el problema de la elección óptima del portafolio en un contexto intertemporal. La relevancia de la teoría intertemporal del

portafolio en las finanzas es que describe mejor el problema que enfrentan los inversionistas de largo plazo, ver por ejemplo Brennan et.al. (1997). Luego explicamos el método de solución a este problema llamado el enfoque de martingalas, que constituye una innovación importante con respecto a las técnicas convencionales de programación dinámica, pero que no obstante, no resuelve en forma general el problema de hacer explícita la martingala que caracteriza la estrategia óptima de inversiones. Posteriormente mostramos cómo se utiliza el cálculo de Malliavin para derivar las reglas de portafolio óptimas en función de integrales que pueden ser obtenidas fácilmente por medio de simulaciones de Monte Carlo. Este método fue creado por Detemple, Garcia y Rindisbacher (2003). Finalmente describimos la implementación práctica de este método con funciones de utilidad de poder CRRA.

3.1 El problema del inversionista

Seguimos la formulación intertemporal del problema del consumo y del portafolio dada en Merton (1971). Una vez más, modelamos la incertidumbre mediante un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sobre el que se define un movimiento browniano d -dimensional $W = (W_t)_{t \geq 0}$, y sea $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la aumentación de la filtración generada por W . El inversionista opera en un mercado financiero sin fricciones en los cuales los precios de los activos y las variables de estado siguen procesos de difusión conjuntos. El inversionista tiene un horizonte finito $[0, T]$.

El mercado financiero tiene d activos riesgosos (acciones y bonos) y un activo sin riesgo. El precio del activo riesgoso i , está dado por

$$dS_t^i = S_t^i [(\mu^i(t, Y_t) - \delta^i(t, Y_t))dt + \sigma^i(t, Y_t)dW_t] ,$$

con S_0^i dado, $i = 1, \dots, d$, donde μ^i es la tendencia o *drift*, δ^i el dividendo y σ^i el vector $1 \times d$ de coeficientes de volatilidad y todos ellos satisfacen las condiciones de regularidad requeridas para que la EDE exista y para que $S \in \mathbb{D}^{1,2}$. Estos coeficientes dependen de un vector $k \times 1$ de variables de estado $Y = (Y^1, \dots, Y^k)'$. El activo sin riesgo paga intereses a la tasa instantánea $r(t, Y_t)$, que también depende de las variables de estado. Por conveniencia notacional escribimos μ_t para el vector $d \times 1$ de retornos esperados riesgosos en la fecha t y σ_t para la matriz $d \times d$ de volatilidades de los retornos. Similarmente escribiremos r_t para la tasa de interés. Asumimos siempre que σ es invertible, en otras palabras que los mercados son completos.

El sistema de precios que acabamos de describir induce en forma única el vector de precios de riesgo de mercado de dimensión d : $\lambda_t = (\lambda_t^1, \dots, \lambda_t^d)'$ definido por $\lambda_t \equiv \sigma_t^{-1}(\mu_t - r_t \mathbf{1})$ donde $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)'$ es el vector de unos de di-

mencción d . Este vector captura la prima implícitamente asignada por el mercado financiero a las varias fuentes de incertidumbre afectando la economía, es decir, los movimientos brownianos. Por consiguiente, W^i lleva una prima λ_t^i en el periodo t .

Asumimos que λ_t satisface la condición de Novikov $E \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \lambda'_s \lambda_s ds \right\} \right] < \infty$, esto implica que el exponencial estocástico

$$\mathcal{E}_t = \exp \left(- \int_0^t \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s ds - \int_0^t \lambda'_s dW_s \right)$$

es una martingala positiva. Si no hay arbitraje existe la densidad de precios de estado (DPE), y usando el activo que paga la tasa sin riesgo r como numerario, esta viene dada por

$$\begin{aligned} \xi_t &= \exp \left(- \int_0^t (r_s + \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s) ds - \int_0^t \lambda'_s dW_s \right) \\ &= \exp \left(- \int_0^t r_s ds \right) \exp \left(- \int_0^t \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s ds - \int_0^t \lambda'_s dW_s \right) \end{aligned}$$

que también puede ser expresada en forma relativa a un ξ_t

$$\xi_{t,v} = \frac{\xi_v}{\xi_t} = \frac{\exp \left(- \int_0^v (r_s + \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s) ds - \int_0^v \lambda'_s dW_s \right)}{\exp \left(- \int_0^t (r_s + \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s) ds - \int_0^t \lambda'_s dW_s \right)}$$

obteniendo

$$\xi_{t,v} \equiv \exp \left(- \int_t^v (r_s + \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s) ds - \int_t^v \lambda'_s dW_s \right).$$

Alternativamente podemos decir que ξ , con ξ_0 dado, resuelve la EDE

$$\begin{aligned} d\xi_t &= \xi_t \left(-r_t dt - \frac{1}{2} \lambda'_t \lambda_t dt - \lambda'_t dW_t \right) \\ &= \xi_t \left(- \left(r_t + \frac{1}{2} \lambda'_t \lambda_t \right) dt - \lambda'_t dW_t \right). \end{aligned}$$

Esta densidad de precios de estado es el factor de descuento estocástico usado para valorar cualquier activo con flujos de caja autofinanciados y contingentes en las fuentes de incertidumbre W y contiene un componente de descuento por la tasa sin riesgo y un cambio de medida dado por el exponencial estocástico. Que el exponencial estocástico es un cambio de medida equivalente es la conclusión del teorema de Girsanov. La importancia de este factor de

descuento es que, para cualquier flujo de caja autofinanciado X_t , el proceso $\xi_t X_t$, $t \in [0, T]$ es una martingala bajo la medida de probabilidad física P , o lo que es lo mismo, una P -martingala. El teorema de Girsanov nos da un cambio de medida. Esto significa que podemos obtener la medida martingala equivalente o medida neutral al riesgo Q , mediante $dQ = \exp(\int_0^T r_s ds) \xi_T dP$, bajo la cual $\exp(\int_0^t -r_s ds) X_t$, $t \in [0, T]$ es una Q -martingala. Bajo esta medida, el valor de un flujo de caja autofinanciado es simplemente el valor presente descontado por la tasa sin riesgo de aquellos flujos, tal como serían valuados por un inversionista neutral al riesgo. La fuente de incertidumbre en la nueva medida de probabilidad $W^Q = (W_t^Q)_{t \geq 0}$ viene dada por

$$W_t^Q = W_t - \int_0^t \lambda_s ds$$

Finalmente la DPE nos da los precios de las mercancías Arrow-Debreu. Recordemos que estas mercancías nos pagan una unidad de consumo en una fecha futura T en el estado de la naturaleza ω , es decir su pago es $1_{T,\omega}$. Por lo tanto su precio será $\xi_T(\omega) dP(\omega)$.

Las k variables de estado $Y = (Y^1, \dots, Y^k)'$ afectan el conjunto de oportunidades de inversión, es decir las medias y variancias de los retornos de los activos y la tasa libre de riesgo. Los precios del riesgo de mercado y la tasa de interés pueden ser elegidos como variables de estado, poniendo $Y^1 = r$ y $Y^j = \lambda^j$, $j = 1, \dots, d$. Podemos incluir como variables de estado adicionales el ratio dividendo-precio, tamaño de firma, ingresos y otros factores necesarios para describir los retornos.

La evolución de las variables de estado está dada por

$$dY_t = \mu^Y(t, Y_t) dt + \sigma^Y(t, Y_t) dW_t,$$

donde $\mu^Y(t, Y_t)$ es el vector $k \times 1$ de coeficientes de tendencia y $\sigma^Y(t, Y_t)$ es una matriz $k \times d$ de coeficientes de volatilidad, ambos cumpliendo las condiciones de regularidad usuales, y Y_0 está dado.

En este entorno, el inversionista consume e invierte en activos. La riqueza es el valor de los activos mantenidos en el portafolio. Denotemos con X_t la riqueza en el periodo t . Si π_t es el vector $d \times 1$ de fracciones de la riqueza invertidas en los activos riesgosos, $1 - \pi_t' \mathbf{1}$ es la proporción invertida en el activo sin riesgo y c_t el monto retirado del portafolio para consumo, entonces la riqueza evoluciona de acuerdo a

$$dX_t = (X_t r_t - c_t) dt + X_t \pi_t' [(\mu_t - r_t \mathbf{1}) dt + \sigma_t dW_t], \quad t \in (0, T) \quad (16)$$

sujeito a una condición inicial x .

Consideramos inversionistas con preferencias von Neumann-Morgenstern con separabilidad temporal que obtienen utilidad tanto del consumo intermedio como de la riqueza terminal. Un plan de consumo y riqueza terminal (c, X_T) , donde $c = (c_t)_{t \in [0, T]}$ es evaluado de acuerdo al criterio de utilidad esperada

$$\max E \left[\int_0^T u(c_v, v) dv + U(X_T, T) \right].$$

Se asume que las funciones de utilidad u y U son estrictamente crecientes, estrictamente cóncavas y diferenciables. Suponemos para simplificar la discusión que se cumplen las condiciones de Inada: $\lim_{c \rightarrow 0} u'(c, t) = \lim_{X \rightarrow 0} U'(X, T) = \infty$ y $\lim_{c \rightarrow \infty} u'(c, t) = \lim_{X \rightarrow \infty} U'(X, T) = 0$, donde $u'(c, t) \equiv \partial u(c, t) / \partial c$ y $U'(X, T) \equiv \partial U(X, T) / \partial X$.

El objetivo del inversionista es maximizar

$$\max E \left[\int_0^T u(c_v, v) dv + U(X_T, T) \right] \quad (17)$$

con respecto a (c, π, X_T) , $\pi = (\pi_t)_{t \in [0, T]}$, sujeto a las restricciones siguientes:

$$\begin{aligned} dX_t &= (r_t X_t - c_t) dt + X_t \pi'_t [(\mu_t - r_t \mathbf{1}) dt + \sigma dW_t], \quad t \in (0, T) \\ c_t &\geq 0, \quad t \in [0, T] \\ X_t &\geq 0, \quad t \in [0, T] \\ X_0 &\text{ dado} \end{aligned}$$

La primera restricción es la restricción presupuestal dinámica, es decir, la evolución de la riqueza dada una política de consumo y de portafolio (c, π) . La segunda restricción captura la restricción física de que el consumo no puede ser negativo, $c_t \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$. La penúltima estipula que la riqueza no puede ser negativa. Esta restricción tiene la naturaleza de una condición de no incumplimiento de obligaciones.

Es bien conocido que el supuesto de utilidad marginal infinita en cero, la condición de Inada, asegura que el consumo óptimo es no-negativo y esto garantiza una riqueza no negativa porque la riqueza es el valor presente del consumo futuro. Por lo tanto, en este caso, las restricciones pueden ser ignoradas en el problema de optimización. En ausencia de las condiciones de Inada, las restricciones van a activarse y deben ser incorporadas en el problema de optimización.

3.2 La formulación de martingalas

A fin de resolver el problema dinámico de elección del consumo y de portafolio descrito, lo reformulamos usando el enfoque de martingalas, que trans-

forma el problema dinámico que acabamos de presentar como un problema de optimización estático. Cox y Huang (1989) y Karatzas et al. (1987) han demostrado que el problema estático equivalente al dinámico (17) es maximizar

$$\max_{c, X_T} E \left[\int_0^T u(c_v, v) dv + U(X_T) \right] \quad (18)$$

sujeto a la restricción presupuestal estática

$$E \left[\int_0^T \xi_v c_v dv + \xi_T X_T \right] \leq x,$$

a las restricciones de no negatividad del consumo $c_t \geq 0$, $0 \leq t \leq T$ y la de consumo terminal $X_T \geq 0$. En esta formulación el inversionista elige el plan de consumo (c, X_T) sujeto a una restricción presupuestal estática y restricciones de no-negatividad en el consumo y $X_T \geq 0$. La restricción presupuestal estipula que el valor presente del plan debe tener como cota superior a la riqueza inicial. En otras palabras el valor presente de los gastos no puede exceder el valor de los recursos iniciales.

Para demostrar la equivalencia de (17) y (18) tenemos que comprobar que si (c, π) son admisibles en el problema dinámico, es decir satisfacen las restricciones de (17), entonces c es una estrategia admisible para el problema estático (18), y adicionalmente, si c es una estrategia admisible para (18), existe π tal que (c, π) son admisibles en el problema (17). Como las funciones objetivo en ambos problemas son las mismas basta comprobar que una estrategia admisible en un problema también es admisible en el otro y viceversa.

Esta demostración es particularmente sencilla usando métodos probabilísticos. Para la primera parte, supongamos que $X \geq 0$ y $c \geq 0$, entonces $\xi_t X_t + \int_0^t \xi_s c_s ds \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$. El término $\xi_t X_t + \int_0^t \xi_s c_s ds$ es una martingala local positiva lo que implica que es una supermartingala por el lema de Fatou, ver IV.1.46 en Revuz y Yor (1999). Se desprende que $E[\xi_T X_T + \int_0^T \xi_s c_s ds] \leq x$ lo que implica que c es admisible en el problema estático.

Para la segunda parte escribimos

$$\begin{aligned} E_t \left[\int_t^T \xi_s c_s ds + \xi_T X_T \right] &= E_t \left[\int_0^T \xi_s c_s ds + \xi_T X_T \right] - \int_0^t \xi_s c_s ds \\ &= E_0 \left[\int_0^T \xi_s c_s ds + \xi_T X_T \right] + \int_0^t \phi_s dW_s - \int_0^t \xi_s c_s ds \end{aligned}$$

y

$$\xi_t X_t = E_0 \left[\int_0^T \xi_s c_s ds + \xi_T X_T \right] + \int_0^t \phi_s dW_s - \int_0^t \xi_s c_s ds$$

para algún $(\phi_t)_{t \in [0, T]}$. Por la condición de admisibilidad de c en (18) tenemos que

$$\begin{aligned}\xi_t X_t - \int_0^t \xi_s c_s ds &= x + \int_0^t \phi_s dW_s \\ &= x + E_t \left[\int_0^T \xi_s c_s ds + \xi_T X_T \right] - E_0 \left[\int_0^T \xi_s c_s ds + \xi_T X_T \right] \\ &= E_t \left[\int_0^T \xi_s c_s ds + \xi_T X_T \right]\end{aligned}$$

de donde $\xi_t X_t \geq E_t \left[\int_0^T \xi_s c_s ds + \xi_T X_T \right] \geq 0$, es decir $X_t \geq 0$ para todo $t \in [0, T]$ debido a que ξ_t es una martingala positiva, y esto prueba que existe un π , obtenible de ϕ , con

$$X_t \pi'_t = \lambda_t X_t (\sigma_t)^{-1} + \xi_t^{-1} \phi_t (\sigma_t)^{-1} \quad (19)$$

tal que (c, π) satisface las restricciones del problema dinámico (17). Explicaremos cómo se obtiene (19) luego.

El problema estático es un problema de optimización restringido que puede ser resuelto formando el Lagrangiano

$$Q(c, X_T, y) \equiv E \left[\int_0^T u(c_v, v) dv + U(X_T) \right] + y \left(x - E \left[\int_0^T \xi_v c_v dv + \xi_T X_T \right] \right),$$

donde y es el multiplicador positivo de Lagrange para la restricción presupuestal estática y buscando el punto de ensilladura, es decir resolviendo

$$\min_{y > 0} \max_{c \geq 0, X_T \geq 0} Q(c, X_T, y).$$

El multiplicador representa el precio sombra de la restricción presupuestal. El problema de optimización de Lagrange es resuelto en dos etapas, primero ignorando las restricciones de no negatividad $c \geq 0$, $X_T \geq 0$, luego verificando que la solución derivada satisface las condiciones requeridas.

El proceso c , y la riqueza final X_t son óptimos si no existe un proceso $\Delta = (\Delta_t)_{t \in [0, T]}$ tal que $Q(c + \epsilon \Delta_t, X_T + \epsilon \Delta_T, y) > Q(c, X_T, y)$, para algún ϵ . Las condiciones necesarias vienen dadas en consecuencia por

$$\left. \frac{\partial Q(c + \epsilon \Delta_t, X_T + \epsilon \Delta_T, y)}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$$

para cualquier Δ . Esto nos dá

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial Q}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} &= E \left[\int_0^T u'(c_t, t) \Delta_t dt + U'(X_T) \Delta_T \right] - y E \left[\int_0^T \xi_s \Delta_s ds + \xi_T \Delta_T \right] \\ &= E \left[\int_0^T (u'(c_t, t) - y \xi_t) \Delta_t dt \right] + E [(U'(X_T) - y \xi_T) \Delta_T] \\ &= 0\end{aligned}$$

Como Δ_t , $t \in [0, T]$ es arbitrario (posiblemente no cero) tenemos que las condiciones de primer orden para el problema de optimización de Lagrange y por lo tanto para el problema estático son

$$\begin{aligned} u'(c_t, t) &= y\xi_t, \quad 0 \leq t < T \\ U'(X_T) &= y\xi_T, \\ E \left[\int_0^T \xi_v c_v dv + \xi_T X_T \right] &\leq x, \end{aligned}$$

y muestran que el consumo óptimo es elegido de tal forma que la utilidad marginal de una unidad adicional de consumo se iguala al costo marginal. Este último es dado por la densidad de precios de estado ajustado por el precio sombra de la restricción presupuestal. Estas condiciones son también suficientes debido a la concavidad estricta de la función de utilidad.

A fin de resolver el sistema de condiciones de optimalidad, denotemos como $I(y, t)$ y $J(y, T)$ las inversas de las funciones de utilidad marginal $u'(c_t, t)$ y $U'(X_T, T)$, respectivamente. La concavidad estricta de las funciones de utilidad nos asegura que estas funciones inversas existen y que son únicas. Como las utilidades marginales van de 0 a ∞ las funciones inversas están definidas sobre los reales positivos. Nuestros candidatos para las corrientes de consumo y la riqueza terminal óptimos están dados por las funciones

$$\begin{aligned} c_t &= I(y\xi_t, t), \\ X_T &= J(y\xi_T, T). \end{aligned}$$

Sustituyendo estas expresiones en la restricción presupuestal en forma de valor presente muestra que y satisface la restricción presupuestal asociada $E \left[\int_0^T \xi_v I(y\xi_v, v) dv + \xi_T J(y\xi_T, T) \right] = x$. Dado que las inversas de las funciones de utilidad marginal $I(\cdot, \cdot)$ y $J(\cdot, \cdot)$ son estrictamente decrecientes y van de $+\infty$ a 0, hay una solución única y^* y esta solución es estrictamente positiva. Las políticas óptimas candidatas están dadas por estas funciones evaluadas en y^* . Como las funciones $I(\cdot, \cdot)$ y $J(\cdot, \cdot)$ son estrictamente positivas, estas políticas son en efecto óptimas para el problema restringido.

Con las expresiones para consumo y riqueza terminal óptimos es fácil derivar una fórmula para la riqueza óptima. De hecho, la riqueza representa el valor presente del consumo futuro y por consiguiente, viene dada por

$$X_t^* = E_t \left[\int_t^T \xi_{t,v} I(y^* \xi_v, v) dv + \xi_{t,T} J(y^* \xi_T, T) \right] \quad (20)$$

para todo $t \in [0, T]$. Dado que las funciones de consumo $c_t^* = I(y^* \xi_t, t)$ y $X_T^* = J(y^* \xi_T, T)$ son no negativos, queda claro que la riqueza óptima satisface la restricción $X_t^* \geq 0$ en todo momento.

3.3 El portafolio óptimo con cálculo de Malliavin

La política óptima del portafolio es la estrategia de inversiones que financia la corriente óptima de consumo intermedio y la riqueza terminal también óptima. En otros términos, es el portafolio que genera el proceso óptimo de riqueza. Sea X^* el proceso de riqueza óptima, si no existe arbitraje $\xi_t X_t^*$ es una P -martingala y X_t^* es una Q -martingala, donde Q es la medida martingala equivalente. El portafolio óptimo corresponde al integrando en la representación por martingalas de la Q -dinámica de X^* , es decir del proceso óptimo de la riqueza descontado, es decir

$$dX_t^* = \phi_t dW_t^Q \text{ ó } d\xi_t X_t^* = \phi_t dW_t.$$

Como mencionamos anteriormente el portafolio óptimo es el que financia el proceso de la riqueza óptima. Bajo Q , el proceso de la riqueza óptima es una martingala porque es auto financiada y por lo tanto la estrategia de inversiones viene dada por la volatilidad de la Integral de Itô en su dinámica. Llegamos a la misma conclusión examinando la demostración de la equivalencia entre el problema original dinámico (17) y el problema estático de la formulación de martingalas (18), donde se concluye que (19) es decir que el portafolio óptimo π viene dado por la volatilidad de la integral de Itô ϕ . Equivalentemente obtenemos que el portafolio óptimo es la volatilidad en una integral de Itô simplemente aplicando el teorema de Girsanov a la restricción presupuestal dinámica (16) resultando en

$$dX_t^* = X_t^* \pi_t^{*'} \sigma_t dW_t^Q.$$

Vemos que para obtener una fórmula cerrada para el portafolio óptimo debemos encontrar una expresión explícita para ϕ , pero el enfoque de martingalas no nos la proporciona en general. La fórmula Clark-Ocone del cálculo de Malliavin nos permite justamente resolver este problema. La fórmula Clark-Ocone, proporciona una expresión para este coeficiente de volatilidad ϕ , y puede ser aplicada para concluir que $X_t^* \pi_t^{*'} \sigma_t = D_t X_t^*$, es decir, la derivada de Malliavin de la riqueza óptima. Basta entonces calcular $D_t X_t^*$ a partir del proceso de de riqueza óptima para derivar la fórmula del portafolio.

Una renormalización del proceso de riqueza óptima simplifica este cálculo. Consideremos el proceso de riqueza descontada $\xi_t X_t^*$. Como ξ_t es el factor de descuento estocástico, $\xi_t X_t^*$ es una P -martingala. Además, por la regla del producto del cálculo de Itô, una simple consecuencia del lema de Itô, su coeficiente de difusión es $\xi_t X_t^* (\pi_t^{*'} \sigma_t - \lambda_t')$:

$$\begin{aligned} d(\xi_t X_t^*) &= \xi_t dX_t^* + X_t^* d\xi_t + d[\xi, X^*]_t \\ &= \xi_t X_t^* \pi_t^{*'} \sigma_t dW_t + X_t^* (-\xi_t \lambda_t' dW_t) \\ &= \xi_t X_t^* (\pi_t^{*'} \sigma_t - \lambda_t') dW_t, \end{aligned}$$

verificando de esta forma (19): basta igualar $\phi_t = \xi_t X_t^* (\pi_t^{*'} \sigma_t - \lambda_t')$ para obtener el resultado.

Antes de aplicar el cálculo de Malliavin a $\xi_t X_t^*$ debemos verificar si está en el espacio $\mathbb{D}^{1,2}$, lo que se desprende de la regla del producto del cálculo de Malliavin (10) y del hecho que ambos ξ_t y X_t^* están en $\mathbb{D}^{1,2}$. Se concluye inmediatamente por el cálculo de Malliavin (4) que $\xi_t X_t^* (\pi_t^{*'} \sigma_t - \lambda_t') = D_t(\xi_t X_t^*)$: aplicando sucesivamente la fórmula de Clark-Ocone (6), la propiedad de conmutatividad de la derivada de Malliavin y esperanzas condicionales (7), y recordando que $\xi_t X_t^*$ es una martingala

$$\begin{aligned} \xi_t X_t^* &= E[\xi_t X_t^*] + \int_0^t E[D_s(\xi_t X_t^*) | \mathcal{F}_s] dW_s \\ &= E[\xi_t X_t^*] + \int_0^t D_s(E[\xi_t X_t^* | \mathcal{F}_s]) dW_s \\ &= E[\xi_0 X_0^*] + \int_0^t D_s(\xi_s X_s^*) dW_s \\ &= x + \int_0^t D_s(\xi_s X_s^*) dW_s \end{aligned}$$

Despejando π^* obtenemos la siguiente expresión para el portafolio óptimo:

$$\pi_t^* = (\sigma_t')^{-1} \lambda_t + (\xi_t X_t^*)^{-1} (\sigma_t')^{-1} (D_t(\xi_t X_t^*))',$$

donde

$$\xi_t X_t^* = E_t \left[\int_t^T \xi_v I(y^* \xi_v, v) dv + \xi_T J(y^* \xi_T, T) \right].$$

En esta expresión $c_v^* = I(y^* \xi_v, v)$ representa el consumo óptimo y $X_T^* = J(y^* \xi_T, T)$ es la riqueza terminal óptima. Aplicando ahora sucesivamente la conmutatividad de D_t y la esperanza condicional (7), aplicando D_t a una integral de Riemann (3), la regla del producto (10), y la regla de la cadena

(9)

$$\begin{aligned}
D_t(\xi_t X_t^*) &= D_t \left(E \left[\int_t^T \xi_v (u')^{-1}(y^* \xi_v, v) dv + \xi_T (U')^{-1}(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] \right) \\
&= E \left[D_t \left(\int_t^T \xi_v (u')^{-1}(y^* \xi_v, v) dv \right) + D_t(\xi_T (U')^{-1}(y^* \xi_T, T)) | \mathcal{F}_t \right] \\
&= E \left[\int_t^T D_t(\xi_v (u')^{-1}(y^* \xi_v, v)) dv + D_t(\xi_T (U')^{-1}(y^* \xi_T, T)) | \mathcal{F}_t \right] \\
&= E \left[\int_t^T (D_t \xi_v \cdot (u')^{-1}(y^* \xi_v, v) + \xi_v \cdot D_t((u')^{-1}(y^* \xi_v, v))) dv \right. \\
&\quad \left. + D_t \xi_T \cdot (U')^{-1}(y^* \xi_T, T) + \xi_T \cdot D_t((U')^{-1}(y^* \xi_T, T)) | \mathcal{F}_t \right] \\
&= E \left[\int_t^T \left(D_t \xi_v \cdot (u')^{-1}(y^* \xi_v, v) + \xi_v \cdot \frac{\partial}{\partial c}((u')^{-1}(y^* \xi_v, v)) \cdot y^* D_t \xi_v \right) dv \right. \\
&\quad \left. + D_t \xi_T \cdot (U')^{-1}(y^* \xi_T, T) + \xi_T \cdot \frac{\partial}{\partial X}((U')^{-1}(y^* \xi_T, T)) \cdot y^* D_t \xi_T | \mathcal{F}_t \right] \\
&= E \left[\int_t^T Z_1(y^* \xi_v, v) D_t \xi_v dv + Z_2(y^* \xi_T, T) D_t \xi_T | \mathcal{F}_t \right]
\end{aligned}$$

o

$$D_t(\xi_t X_t^*) = E_t \left[\int_t^T Z_1(y^* \xi_v, v) D_t \xi_v dv + Z_2(y^* \xi_T, T) D_t \xi_T \right], \quad (21)$$

donde

$$Z_1(y^* \xi_v, v) = I(y^* \xi_v, v) + y^* \xi_v I'(y^* \xi_v, v) = c_v^* \left(1 - \frac{1}{R_u(c_v^*, v)} \right), \quad (22)$$

$$Z_2(y^* \xi_T, T) = J(y^* \xi_T, T) + y^* \xi_T J'(y^* \xi_T, T) = X_T^* \left(1 - \frac{1}{R_U(X_T^*, T)} \right), \quad (23)$$

donde $I'(y^* \xi_v, v)$, $J'(y^* \xi_T, T)$ son las derivadas con respecto al primer argumento $y^* \xi$ de las inversas de las funciones de utilidad marginal y $R_u(x, v) = -u''(x, v)x/u'(x, v)$, $R_U(X, T) = -U'(X, T)X/U'(X, T)$ son los coeficientes de aversión relativa al riesgo $u''(c, t) \equiv \partial^2 u(c, t)/\partial c^2$ y $U'(X, T) \equiv \partial^2 U(X, I)/\partial X^2$. Similarmente, de la definición de factor de descuento estocástico

$$\xi_v \equiv \exp \left(- \int_0^v (r_s + \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s) ds - \int_0^v \lambda'_s dW_s \right)$$

obtenemos, aplicando la regla de la cadena (9), la derivada de Malliavin de una integral de Riemann (11), la de una integral de Itô (4), la regla de la

cadena nuevamente

$$\begin{aligned}
D_t \xi_v &= D_t \left(\exp \left\{ - \int_0^v \left(r_s + \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s \right) ds - \int_0^v \lambda'_s dW_s \right\} \right) \\
&= -\xi_v \cdot \left(D_t \left(\int_0^v \left(r_s + \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s \right) ds \right) + D_t \left(\int_0^v \lambda'_s dW_s \right) \right) \\
&= -\xi_v \cdot \left(\int_t^v (D_t r_s + \lambda'_s D_t \lambda_s) ds + D_t \left(\int_0^v \lambda'_s dW_s \right) \right) \\
&= -\xi_v \cdot \left(\int_t^v (D_t r_s + \lambda'_s D_t \lambda_s) ds + \int_t^v dW'_s \cdot D_t \lambda_s + \lambda'_t \right) \\
&= -\xi_v \left(\int_t^v \left(\frac{\partial}{\partial Y} r(s, Y_s) + \lambda'_s \frac{\partial}{\partial Y} \lambda(s, Y_s) \right) D_t Y_s ds \right. \\
&\quad \left. + \int_t^v dW'_s \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \lambda(s, Y_s) D_t Y_s + \lambda'_t \right)
\end{aligned}$$

donde $r(s, Y_s)$ es el gradiente de r con respecto a Y :

$$\frac{\partial}{\partial Y} r(s, Y_s) = \left(\frac{\partial}{\partial y_1} r(s, Y_s), \dots, \frac{\partial}{\partial y_k} r(s, Y_s) \right),$$

y $\frac{\partial}{\partial Y} \lambda(s, Y_s)$ es la matriz $d \times k$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \lambda_i(s, Y_s) \right), \quad i = 1, \dots, d \text{ y } j = 1, \dots, k.$$

Esta ecuación puede ser re-escrita como

$$D_t \xi_v = -\xi_v (H'_{t,v} + \lambda'_t)$$

con

$$H'_{t,v} = \int_t^v \left(\frac{\partial}{\partial Y} r(Y_s, s) + \lambda'_s \frac{\partial}{\partial Y} \lambda(Y_s, s) \right) D_t Y_s ds + \int_t^v dW'_s \cdot \frac{\partial}{\partial Y} \lambda(Y_s, s) D_t Y_s.$$

La derivada de Malliavin del proceso de difusión $D_t Y_s$ se calcula de la expresión

$$\begin{aligned}
Y_s &= Y_0 + \int_0^s \mu_v^Y dv + \int_0^s \sigma_v^Y dW_v \\
&= Y_0 + \int_0^s \mu_v^Y dv + \sum_{j=1}^d \int_0^s \sigma_j^Y(v, Y_v) dW_{jv}.
\end{aligned}$$

y aplicando la regla de la cadena (9), y la derivada de Malliavin de un proceso $\mathcal{F}_s$ -adaptado (8)

$$D_t Y_s = D_t Y_0 + \int_t^s \frac{\partial}{\partial Y} \mu^Y(v, Y_v) D_t Y_v dv + \sum_{j=1}^d \int_t^s \frac{\partial}{\partial Y} \sigma_j^Y(v, Y_v) D_t Y_v dW_{jv} + \sigma^Y(t, Y_t)$$

obtenemos $D_t Y_0 = 0$, y que se satisface la ecuación diferencial estocástica

$$\begin{aligned} dD_t Y_s &= \frac{\partial}{\partial Y} \mu^Y(s, Y_s) D_t Y_s ds + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial Y} \sigma_j^Y(s, Y_s) D_t Y_s dW_{js} \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial Y} \mu^Y(s, Y_s) ds + \sum_{j=1}^d \frac{\partial}{\partial Y} \sigma_j^Y(s, Y_s) dW_{js} \right] D_t Y_s; \\ D_t Y_t &= \sigma^Y(t, Y_t). \end{aligned}$$

donde la última ecuación denota la condición inicial $\lim_{s \rightarrow t} D_t Y_s = \sigma^Y(t, Y_t)$, y $\frac{\partial}{\partial Y} \mu^Y(s, Y_s)$ es la matriz

$$\left(\frac{\partial \mu_i^Y}{\partial y_l} \right)_{i,l=1}^k.$$

Sustituyendo estas derivadas en el portafolio óptimo (21), reagrupando términos y simplificando encontramos la fórmula cerrada del portafolio:

$$\begin{aligned} D_t(\xi_t X_t^*) &= E \left[\int_t^T Z_1(y^* \xi_v, v) D_t \xi_v dv + Z_2(y^* \xi_T, T) D_t \xi_T | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\int_t^T Z_1(y^* \xi_v, v) (-\xi_v (H'_{t,v} + \lambda'_t)) dv \right. \\ &\quad \left. + Z_2(y^* \xi_T, T) (-\xi_T (H'_{t,T} + \lambda'_t)) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= -E \left[\int_t^T \xi_v Z_1(y^* \xi_v, v) dv + \xi_T Z_2(y^* \xi_T, T) \cdot \lambda'_t | \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - E \left[\int_t^T \xi_v Z_1(y^* \xi_v, v) H'_{t,v} dv + \xi_T Z_2(y^* \xi_T, T) H'_{t,T} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= -E \left[\int_t^T \xi_v Z_1(y^* \xi_v, v) dv + \xi_T Z_2(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] \cdot \lambda'_t \\ &\quad - E \left[\int_t^T \xi_v Z_1(y^* \xi_v, v) H'_{t,v} dv + \xi_T Z_2(y^* \xi_T, T) H'_{t,T} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= \xi_t (X_t^* \pi_t^{*'} \sigma_t - X_t^* \lambda'_t), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} X_t^* \pi_t^{*'} \sigma_t - X_t^* \lambda'_t &= -E \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^* \xi_v, v) dv + \xi_{t,T} Z_2(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] \cdot \lambda'_t \\ &\quad - E \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^* \xi_v, v) H'_{t,v} dv + \xi_{t,T} Z_2(y^* \xi_T, T) H'_{t,T} | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} X_t^* \pi_t^{*'} \sigma_t &= \left(X_t^* - E \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^* \xi_v, v) dv + \xi_{t,T} Z_2(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] \right) \cdot \lambda'_t \\ &\quad - E \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^* \xi_v, v) H'_{t,v} dv + \xi_{t,T} Z_2(y^* \xi_T, T) H'_{t,T} | \mathcal{F}_t \right]. \quad (24) \end{aligned}$$

Usando la definición de X_t^* (20), la de Z_1 (22) y Z_2 (23),

$$\begin{aligned} &X_t^* - E \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^* \xi_v, v) dv + \xi_{t,T} Z_2(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\int_t^T \xi_{t,v} (u')^{-1}(y^* \xi_v, v) dv + \xi_{t,T} (U')^{-1}(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] \\ &\quad - E \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^* \xi_v, v) dv + \xi_{t,T} Z_2(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= E \left[\int_t^T \xi_{t,v} ((u')^{-1}(y^* \xi_v, v) - Z_1(y^* \xi_v, v)) dv \right. \\ &\quad \left. + \xi_{t,T} ((U')^{-1}(y^* \xi_T, T) - Z_2(y^* \xi_T, T)) | \mathcal{F}_t \right] \\ &= -E \left[\int_t^T \xi_{t,v} \cdot (y^* \xi_v) \cdot \frac{\partial}{\partial c} (u')^{-1}(y^* \xi_v, v) dv \right. \\ &\quad \left. + \xi_{t,T} \cdot (y^* \xi_T) \cdot \frac{\partial}{\partial X} (U')^{-1}(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la expresión para $X_t^* \pi_t^{*'} \sigma_t$ (24):

$$\begin{aligned} X_t^* \pi_t^{*'} \sigma_t &= -E \left[\int_t^T \xi_{t,v} \cdot (y^* \xi_v) \cdot \frac{\partial}{\partial c} (u')^{-1}(y^* \xi_v, v) dv \right. \\ &\quad \left. + \xi_{t,T} \cdot (y^* \xi_T) \cdot \frac{\partial}{\partial X} (U')^{-1}(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] \cdot \lambda'_t \\ &\quad - E \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^* \xi_v, v) H'_{t,v} dv + \xi_{t,T} Z_2(y^* \xi_T, T) H'_{t,T} | \mathcal{F}_t \right]. \end{aligned}$$

Multiplicando por la derecha $(\sigma_t)^{-1}$ y trasponiendo

$$\begin{aligned} X_t^* \pi_t^* &= -E \left[\int_t^T \xi_{t,v} \cdot (y^* \xi_v) \cdot \frac{\partial}{\partial c} (u')^{-1}(y^* \xi_v, v) dv \right. \\ &\quad \left. + \xi_{t,T} \cdot (y^* \xi_T) \cdot \frac{\partial}{\partial X} (U')^{-1}(y^* \xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] (\sigma'_t)^{-1} \lambda_t \\ &\quad - (\sigma'_t)^{-1} E \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^* \xi_v, v) H_{t,v} dv + \xi_{t,T} Z_2(y^* \xi_T, T) H_{t,T} | \mathcal{F}_t \right] \end{aligned}$$

Concluimos que en el problema consumo-portafolio, la política óptima de consumo es $c_v^* = I(y^* \xi_v, v)$ y la riqueza terminal óptima es $X_T^* = J(y^* \xi_T, T)$. La política óptima de portafolio tiene la descomposición $X_t^* \pi_t^* = X_t^* [\pi_{1t}^* + \pi_{2t}^*]$ donde π_{1t}^* es la demanda en media-variancia y π_{2t}^* la demanda de cobertura intertemporal. Las dos partes están dadas por

$$\begin{aligned} X_t^* \pi_{1t}^* &= -E_t \left[\int_t^T \xi_{t,v} (y^* \xi_v) I'(y^* \xi_v, v) dv + \xi_{t,T} (y^* \xi_T) J'(y^* \xi_T, T) \right] (\sigma'_t)^{-1} \lambda_t, \\ X_t^* \pi_{2t}^* &= -(\sigma'_t)^{-1} E_t \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^* \xi_v, v) H_{t,v} dv + \xi_{t,T} Z_2(y^* \xi_T, T) H_{t,T} \right]. \end{aligned}$$

La riqueza óptima está dada por $X_t^* = E_t \left[\int_t^T \xi_{t,v} I(y^* \xi_v, v) dv + \xi_{t,T} J(y^* \xi_T, T) \right]$.

El portafolio óptimo se puede descomponer en dos partes. La primera, π_1^* , es un componente media-variancia motivado por las propiedades locales de los retornos de los activos que están incorporados en los dos primeros momentos instantáneos. Es el portafolio miópico que resultaría de resolver un problema estático de Markowitz con un horizonte infinitesimal. La segunda parte, π_2^* , es una demanda de cobertura intertemporal, tal como está definida en Merton (1971). Este componente está compuesto de una cobertura de tasa de interés y una cobertura del precio de mercado del riesgo. La aparición de estas dos coberturas se desprende del hecho que el factor de descuento estocástico (FDE) está determinado por r y λ . Como el consumo óptimo y la riqueza terminal son funciones del FDE el inversionista tratará de hacer cobertura contra fluctuaciones en estas cantidades.

3.4 Aplicación para funciones de utilidad CRRA

Para el caso de aversión relativa al riesgo constante el portafolio se simplifica como sigue: supongamos que el inversionista posee aversión al riesgo relativa constante $R > 0$ y tiene factores de descuento subjetivos $\eta_t \equiv \exp(-\beta t)$ donde β es una tasa de descuento constante. La política de consumo óptima y la riqueza terminal óptima están dadas respectivamente por $c_v^* =$

$(y^*\xi_v/\eta_v)^{-1/R}$ y $X_T^* = (y^*\xi_T/\eta_T)^{-1/R}$. La política de portafolio óptima está dada por $X_t^*\pi_t^* = X_t^*[\pi_{1t}^* + \pi_{2t}^*]$ donde

$$X_t^*\pi_{1t}^* = \frac{X_t^*}{R}(\sigma'_t)^{-1}\lambda_t,$$

$$X_t^*\pi_{2t}^* = -X_t^*\rho(\sigma'_t)^{-1} \frac{E_t \left[\int_t^T \xi_{t,v}^\rho \eta_{t,v}^{1/R} H_{t,v} dv + \xi_{t,T}^\rho \eta_{t,T}^{1/R} H_{t,T} \right]}{E_t \left[\int_t^T \xi_{t,v}^\rho \eta_{t,v}^{1/R} dv + \xi_{t,T}^\rho \eta_{t,T}^{1/R} \right]}$$

con $\rho = 1 - 1/R$.

Para verificar esta fórmula, sustituimos la función de utilidad en las políticas óptimas. Recordemos que la función de utilidad de potencia

$$u(c, t) = \eta_t c^{1-R}/(1-R)$$

y

$$U(X, T) = \eta_T X^{1-R}/(1-R),$$

con $\eta_t \equiv \exp(-\beta t)$, obtenemos

$$\begin{aligned} c_v^* &= I(y^*\xi_v, v) = (y^*\xi_v/\eta_v)^{-1/R} \\ X_T^* &= J(y^*\xi_T, T) = (y^*\xi_T/\eta_T)^{-1/R}, \end{aligned}$$

calculamos la expresión intermedia

$$\begin{aligned} y^*\xi_v I'(y^*\xi_v, v) &= -(1/R)(y^*\xi_v/\eta_v)^{-1/R} = -(1/R)I(y^*\xi_v, v), \\ y^*\xi_T J'(y^*\xi_T, T) &= -(1/R)(y^*\xi_T/\eta_T)^{-1/R} = -(1/R)J(y^*\xi_T, T), \end{aligned}$$

es decir

$$\begin{aligned} (y^*\xi_v) \frac{\partial}{\partial c} (u')^{-1}(y^*\xi_v, v) &= -\frac{1}{R} c_v^* \\ (y^*\xi_T) \frac{\partial}{\partial X} (U')^{-1}(y^*\xi_T, T) &= -\frac{1}{R} X_T^*, \end{aligned}$$

sustituyendo en

$$\begin{aligned} X_t^*\pi_{1t}^* &= -E \left[\int_t^T \xi_{t,v}(y^*\xi_v) \frac{\partial}{\partial c} (u')^{-1}(y^*\xi_v, v) dv \right. \\ &\quad \left. + \xi_{t,T}(y^*\xi_T) \frac{\partial}{\partial X} (U')^{-1}(y^*\xi_T, T) | \mathcal{F}_t \right] (\sigma'_t)^{-1} \lambda_t \\ &= \frac{1}{R} E \left[\int_t^T \xi_{t,v} c_v^* dv + \xi_{t,T} X_T^* | \mathcal{F}_t \right] (\sigma'_t)^{-1} \lambda_t \\ &= \frac{1}{R} X_t^* (\sigma'_t)^{-1} \lambda_t. \end{aligned}$$

usando la definición de la riqueza como valor presente del consumo futuro y la riqueza final. Los procesos $Z_1(y^*\xi_v, v)$ y $Z_2(y^*\xi_T, T)$ pueden también ser escritos en forma cerrada

$$Z_1(y^*\xi_v, v) = c_v^* \left(1 - \frac{1}{R}\right)$$

$$Z_2(y^*\xi_T, T) = X_T^* \left(1 - \frac{1}{R}\right).$$

o $Z_1(y\xi_v, v) = (1 - 1/R)I(y\xi_v, v)$, $Z_2(y\xi_T, T) = (1 - 1/R)J(y\xi_T, T)$.
Sustituimos en la fórmula para π_{2t}^* con $\rho = (1 - 1/R)$,

$$\begin{aligned} X_t^* \pi_{2t}^* &= -(\sigma'_t)^{-1} E \left[\int_t^T \xi_{t,v} Z_1(y^*\xi_v, v) H_{t,v} dv + \xi_{t,T} Z_2(y^*\xi_T, T) H_{t,T} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\rho(\sigma'_t)^{-1} E \left[\int_t^T \xi_{t,v} c_v^* H_{t,v} dv + \xi_{t,T} X_T^* H_{t,T} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\rho(\sigma'_t)^{-1} E \left[\int_t^T \xi_{t,v} (y^*\xi_v/\eta_v)^{-1/R} H_{t,v} dv + \xi_{t,T} (y^*\xi_T/\eta_T)^{-1/R} H_{t,T} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= -\rho(\sigma'_t)^{-1} (y^*\xi_t/\eta_t)^{-\frac{1}{R}} E \left[\int_t^T \xi_{t,v}^\rho \eta_{t,v}^{1/R} H_{t,v} dv + \xi_{t,T}^\rho \eta_{t,T}^{1/R} H_{t,T} | \mathcal{F}_t \right] \\ &= -X_t^* \rho(\sigma'_t)^{-1} (y^*\xi_t/\eta_t)^{-\frac{1}{R}} \frac{E \left[\int_t^T \xi_{t,v}^\rho \eta_{t,v}^{1/R} H_{t,v} dv + \xi_{t,T}^\rho \eta_{t,T}^{1/R} H_{t,T} | \mathcal{F}_t \right]}{X_t^*} \\ &= -X_t^* \rho(\sigma'_t)^{-1} (y^*\xi_t/\eta_t)^{-\frac{1}{R}} \frac{E \left[\int_t^T \xi_{t,v}^\rho \eta_{t,v}^{1/R} H_{t,v} dv + \xi_{t,T}^\rho \eta_{t,T}^{1/R} H_{t,T} | \mathcal{F}_t \right]}{E \left[\int_t^T \xi_{t,v} (y^*\xi_v/\eta_v)^{-1/R} dv + \xi_{t,T} (y^*\xi_T/\eta_T)^{-1/R} | \mathcal{F}_t \right]} \\ &= -X_t^* \rho(\sigma'_t)^{-1} \frac{E \left[\int_t^T \xi_{t,v}^\rho \eta_{t,v}^{1/R} H_{t,v} dv + \xi_{t,T}^\rho \eta_{t,T}^{1/R} H_{t,T} | \mathcal{F}_t \right]}{E \left[\int_t^T \xi_{t,v}^\rho \eta_{t,v}^{1/R} dv + \xi_{t,T}^\rho \eta_{t,T}^{1/R} | \mathcal{F}_t \right]}. \end{aligned}$$

3.5 Implementación de portafolios intertemporales

A fin de implementar computacionalmente la fórmula del portafolio que acabamos de calcular, necesitamos calcular las expectativas condicionales que aparecen en los términos de cobertura. Estas expectativas condicionales se toman sobre las variables aleatorias $\xi_{t,v}$, $H_{t,v}$ que en general serán funcionales dependientes en la historia de las variables de estado Y_s y sus derivadas de Malliavin $D_t Y_s$. Esta complejidad en la estructura de las coberturas naturalmente sugiere el uso de simulaciones de Monte Carlo con el propósito de calcular las políticas óptimas de inversión.

El enfoque de simulación consiste en lo siguiente. Primero, notemos que la demanda de cobertura puede ser escrita en la forma

$$\pi_{2t}^* = -\rho(\sigma_t')^{-1} \frac{E_t[F_{t,T}]}{E_t[G_{t,T}]},$$

donde $F_{t,T} \equiv F_{t,T}^c + F_{t,T}^x$ y $G_{t,T} \equiv G_{t,T}^c + G_{t,T}^x$, con

$$F_{t,T}^c \equiv \int_t^v \xi_{t,s}^\rho \eta_{t,s}^{1/R} H_{t,s} ds \text{ y } F_{t,T}^x \equiv \xi_{t,T}^\rho \eta_{t,T}^{1/R} H_{t,T},$$

$$G_{t,v}^c \equiv \int_t^v \xi_{t,s}^\rho \eta_{t,s}^{1/R} ds \text{ y } G_{t,T}^x \equiv \xi_{t,T}^\rho \eta_{t,T}^{1/R}.$$

Para calcular π_2^* escribimos las variables aleatorias que aparecen en las coberturas como un sistema conjunto $(Y_v, D_t Y_v, K_{t,v}, H_{t,v}, F_v^c)$, donde

$$K_{t,v} \equiv \int_t^v (r_s + \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s) ds + \int_t^v \lambda'_s dW_s,$$

$$H'_{t,v} \equiv \int_t^v \partial r(Y_s, s) D_t Y_s ds + \int_t^v \lambda'_s \partial \lambda(Y_s, s) D_t Y_s ds + \int_t^v dW'_s \cdot \partial \lambda(Y_s, s) D_t Y_s$$

y $\xi_{t,v} = \exp(-K_{t,v})$. Por el lema de Itô podemos escribir la dinámica del sistema como

$$dK_{t,s} = \left(r_s + \frac{1}{2} \lambda'_s \lambda_s \right) ds + \lambda'_s dW_s,$$

$$dH'_{t,s} = \partial r(Y_s, s) D_t Y_s ds + (dW_s + \lambda(Y_s, s) ds)' \partial \lambda(Y_s, s) D_t Y_s,$$

$$dF_{t,s}^c = \xi_{t,s}^\rho \eta_{t,s}^{1/R} H_{t,s} ds,$$

$$dG_{t,s}^c = \xi_{t,s}^\rho \eta_{t,s}^{1/R} ds$$

con condiciones iniciales $K_{t,t} = 0$, $H'_{t,t} = 0$, $F_{t,t}^c = 0$ y $G_{t,t}^c = 0$, junto con las ecuaciones diferenciales estocásticas para $(Y_s, D_t Y_s)$.

Luego, simulamos M trayectorias de las soluciones a estas ecuaciones. Esto puede ser llevado a cabo usando varios esquemas de discretización como el de Euler o el de Milshtein. Sea N el número de puntos de discretización en el tiempo en el esquema elegido. Esta simulación nos dá M estimados $\{(Y_s^{N,i}, D_t^{N,i} Y_s, K_{t,s}^{N,i}, H_{t,s}^{N,i}, F_{t,s}^{c,N,i}, G_{t,s}^{c,N,i}): s \in [t, T]\}$ de las trayectorias $\{(Y_s, D_t Y_s, K_{t,s}, H_{t,s}, F_{t,s}^c, G_{t,s}^c): s \in [t, T]\}$. De los valores terminales de los procesos simulados construimos M estimados de las variables aleatorias $F_{t,T}$ y $G_{t,T}$ en la demanda de cobertura. Promediando sobre estos M valores obtenemos los siguientes estimados de la demanda de cobertura

$$\widehat{\pi}_{2t}^* = -\rho(\sigma_t')^{-1} \frac{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M F_{t,T}^{N,i}}{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M G_{t,T}^{N,i}} = -\rho(\sigma_t')^{-1} \frac{\sum_{i=1}^M F_{t,T}^{N,i}}{\sum_{i=1}^M G_{t,T}^{N,i}}.$$

Las propiedades de este estimador se estudian en Detemple, Garcia y Rindisbacher (2003), donde se demuestra que la precisión del estimado depende del número de replicaciones de Monte Carlo M y del número de puntos de discretización en el tiempo N . La convergencia al valor verdadero es a la tasa $1/\sqrt{M}$ siempre y cuando el ratio $\sqrt{M}/N$ se mantenga constante, es decir cuando M y N se incrementan al mismo tiempo pero haciendo que el ratio $\sqrt{M}/N$ permanezca constante). Para una sola replicación de Monte Carlo, el esquema de Euler converge débilmente a la tasa $1/\sqrt{N}$.

4 Conclusiones

El presente documento ha tenido como objetivo presentar las ideas básicas del cálculo de Malliavin en una forma didáctica y orientada hacia los especialistas en finanzas. Hemos visto que las reglas básicas de cálculo de Malliavin, junto con la fórmula de integración por partes de la que se desprende la fórmula de Bismut-Elworthy-Li, permiten perfeccionar el método de simulación de Monte Carlo que es de amplio uso en la valuación de contratos contingentes entre las instituciones financieras en el mundo.

Asimismo la presentación en este trabajo de la teoría intertemporal del portafolio permite concluir que la fórmula de Clark-Ocone complementa muy bien la teoría estándar de valuación basada en martingalas, así como el método de optimización dinámica denominado enfoque de martingalas. En este último caso, el cálculo de Malliavin permite obtener fórmulas en forma cerrada para el caso multidimensional, que pueden ser implementadas computacionalmente mediante el método de Monte Carlo.

Referencias

- [1] Bally, V. (2003), *An elementary introduction to Malliavin calculus*, Rapport de recherche 4718. INRIA.
- [2] Benhamou, E. (2002), “Smart Monte Carlo: various tricks using Malliavin calculus”, *Quantitative Finance* **2**, 329–336.
- [3] Brennan, M., Schwartz, E. y Lagnado, R. (1997). “Strategic asset allocation”, *Journal of Economic Dynamics and Control* **21**, 1377–1403.
- [4] Cox, J. C. y C. Huang (1989), “Optimal consumption and portfolio policies when asset prices follow a diffusion process”, *Journal of Economic Theory* **49**, 33–83.
- [5] Detemple, J.B., R. Garcia y M. Rindisbacher (2003), “A Monte Carlo method for optimal portfolios”, *Journal of Finance* **58**, 401–446.
- [6] Detemple, J.B., R. Garcia y M. Rindisbacher (2005), “Intertemporal asset allocation: a comparison of methods”, *Journal of Banking and Finance* **29**, 2821–2848.
- [7] Fournié, E., J.-M. Lasry, J. Lebuchoux, P.-L. Lions y N. Touzi (1999), “Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance”, *Finance and Stochastics* **3**, 391–412.
- [8] Fournié, E., J.-M. Lasry, J. Lebuchoux y P.-L. Lions (2001), “Applications of Malliavin calculus to Monte Carlo methods in finance. II”, *Finance and Stochastics* **5**, 201–236.
- [9] Karatzas, I., Lehoczky, J.P. y Shreve, S.E. (1987), “Optimal portfolio and consumption decisions for a small investor on a finite horizon”, *SIAM Journal of Control and Optimization* **25**, 1557–1586.
- [10] Kohatsu-Higa, A. (2001), “Weak approximations. A Malliavin calculus approach”, *Mathematics of Computation* **70**, 135–172.
- [11] Kohatsu-Higa, A. y Montero, M. (2003), “Malliavin calculus applied to finance”, *Physica A* **320**, 548–570.
- [12] Malliavin, P. (1997), *Stochastic Analysis*, Springer-Verlag.
- [13] Merton, R. C. (1969), “Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case”, *Review of Economics and Statistics* **51**, 247–257.

- [14] Merton, R.C. (1971), "Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model", *Journal of Economic Theory* **3**, 373–413.
- [15] Nualart, D. (2006), *The Malliavin calculus and related topics*, segunda edición, Springer-Verlag.
- [16] Øksendal, B. (1997), *An Introduction to Malliavin Calculus with Applications to Economics*, Oslo University.
- [17] Revuz D. y Yor M. (1999), *Continuous Martingales and Brownian Motion*, tercera edición, Springer-Verlag.
- [18] Sanz-Solé, M. (2005), *Malliavin calculus with applications to stochastic partial differential equations*, EPFL Press, distributed by CRC Press.

ÚLTIMAS PUBLICACIONES DE LOS PROFESORES DEL DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA

Libros

Cecilia Garavito e Ismael Muñoz (Eds.)

2012 *Empleo y protección social*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Félix Jiménez

2012 *Elementos de teoría y política macroeconómica para una economía abierta* (Tomos I y II). Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Félix Jiménez

2012 *Crecimiento económico: enfoques y modelos*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Janina León Castillo y Javier M. Iguíñiz Echeverría (Eds.)

2011 *Desigualdad distributiva en el Perú: Dimensiones*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Alan Fairlie

2010 *Biocomercio en el Perú: Experiencias y propuestas*. Lima, Escuela de Posgrado, Maestría en Biocomercio y Desarrollo Sostenible, PUCP; IDEA, PUCP; y, LATN.

José Rodríguez y Albert Berry (Eds.)

2010 *Desafíos laborales en América Latina después de dos décadas de reformas estructurales. Bolivia, Paraguay, Perú (1997-2008)*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú e Instituto de Estudios Peruanos.

José Rodríguez y Mario Tello (Eds.)

2010 *Opciones de política económica en el Perú 2011-2015*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Felix Jiménez

2010 *La economía peruana del último medio siglo*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

Felix Jiménez (Ed.)

2010 *Teoría económica y Desarrollo Social: Exclusión, Desigualdad y Democracia. Homenaje a Adolfo Figueroa*. Lima, Fondo Editorial, Pontificia Universidad Católica del Perú.

José Rodríguez y Silvana Vargas

2009 *Trabajo infantil en el Perú. Magnitud y perfiles vulnerables. Informe Nacional 2007-2008*. Programa Internacional para la Erradicación del Trabajo Infantil (IPEC). Organización Internacional del Trabajo.

Serie: Documentos de Trabajo

- No. 345 "Reglas de política monetaria y choques externos en una economía semi-dolarizada". Oscar Dancourt. Noviembre, 2012.
- No. 345 "Calidad del aire y gasto de bolsillo en salud en Lima Metropolitana: Una aproximación a los modelos de producción de salud". Samuel D. Jaramillo De Souza. Noviembre, 2012.
- No. 344 "IS-LM Stability Revisited: Samuelson was Right, Modigliani was Wrong". Waldo Mendoza. Noviembre, 2012.
- No. 343 "Integración para la inclusión con desarrollo humano en el Perú". Efraín Gonzales de Olarte. Noviembre, 2012.
- No. 342 "Crédito bancario, tasa de interés de política y tasa de encaje en el Perú". Oscar Dancourt. Octubre, 2012.
- No. 341 "Reducción de costos de transporte por medio de la innovación campesina: una ruta por recorrer". Javier M. Iguiñiz. Octubre, 2012.
- No. 340 "Explaining the Determinants of the Frequency of Exchange Rate Interventions in Peru using Count Models". Edgar Ventura y Gabriel Rodríguez. Octubre, 2012.
- No. 339 "Inflation Expectations Formation in the Presence of Policy Shifts and Structural Breaks: An Experimental Analysis". Luis Ricardo Maertens y Gabriel Rodríguez. Octubre, 2012.
- No. 338 "Microeconomía: Teoría de la empresa". Cecilia Garavito. Octubre, 2012.
- No. 337 "El efecto del orden de nacimiento sobre el atraso escolar en el Perú". Luis García Núñez. Setiembre, 2012.
- No. 336 "Modelos de oligopolios de productos homogéneos y viabilidad de acuerdos horizontales". Raúl García Carpio y Raúl Pérez-Reyes Espejo. Setiembre, 2012.