CAPÍTULO 3
LA CONTROVERSIA SOBRE LA TEORÍA DEL CAPITAL Y LA TEORÍA DEL CRECIMIENTO

La controversia sobre la teoría del capital y la función de producción fue iniciada por Joan Robinson con su artículo «The Production Function and the Theory of Capital» (1953-1954). La autora cuestiona la forma de medir el factor de producción capital (*K*) en la función de producción agregada neoclásica. La controversia se da entre los economistas más importantes de las universidades de Cambridge (Inglaterra) y Cambridge (Estados Unidos). Participan en este debate, que dura cerca de dos décadas (cincuenta, sesenta y parte de la década de los setenta), economistas importantes como Joan Robinson, Richard Khan, Robert Solow, James Meade, Paul Samuelson, Pierangelo Garegnani, Luigi Pasinetti y Anwar Shaikh, entre otros.

Eran años de crecimiento económico significativo y de reducciones notables de las tasas de desempleo. El período es conocido como el del *Golden age* del capitalismo (Madison 1991). En su libro *The Conscience of a Liberal* (2007), Paul Krugman señala, refiriéndose a los Estados Unidos, que fue un período caracterizado por una coalición sociopolítica que hizo posible el Estado del Bienestar con organizaciones fuertes de los trabajadores y salarios reales que evolucionaban en consonancia con la productividad. Este hecho histórico puso en tela de juicio la proposición neoclásica según la cual la distribución del ingreso se determina en el mercado libre, por la interacción de la oferta y la demanda de factores.

Los textos conocidos de crecimiento económico no incluyen el contenido de esta controversia, no obstante que ella se produce precisamente en el marco de los modelos que utilizan la función de producción neoclásica. Se sabe, además, que la teoría neoclásica del crecimiento es también una teoría de la distribución. Según esta teoría, los precios y cantidades se determinan simultáneamente y la distribución del ingreso es un caso particular de la teoría de la oferta y la demanda.

En este capítulo presentamos un recuento de la controversia en torno a la teoría del capital. Primero se presenta los resultados de la teoría neoclásica, los cuales se resumen en las parábolas neoclásicas. La segunda sección aborda las críticas de Joan Robinson a la teoría neoclásica del capital y las críticas de Pierangelo Garegnani a la teoría de la productividad marginal. Tercero, se expone el intento de Paul Samuelson de validar la función de producción neoclásica y sus principales errores. La cuarta sección presenta la respuesta de Robert Solow y la crítica de Edward Nell. Finalmente, a modo de conclusión se señala los principales aportes de la controversia sobre la teoría del capital.

1. La teoría de la distribución y la función de producción neoclásicas

De acuerdo a la teoría neoclásica, los precios relativos de los productos, las cantidades de los productos y la distribución del ingreso (producto) se determinan sobre la base de los siguientes datos:

a) Sistema de preferencias

b) Conjunto de técnicas disponibles

c) Cantidad o dotaciones de factores productivos disponibles

A partir de estos datos, que son independientes o exógenos, se determina el equilibrio en todos los mercados, incluyendo el de factores productivos. La competencia genera una tendencia a la plena utilización de la capacidad productiva y de todos los factores.

La teoría neoclásica tiene una particular concepción del proceso productivo. La cantidad de un factor varía inversamente con sus precios relativos, debido a:

1) La existencia de la posibilidad de sustituir por parte de los consumidores bienes que requieren factores productivos en distintas proporciones.

2) Para cualquier nivel de conocimientos técnicos, la existencia de la posibilidad de obtener el mismo producto con proporciones diversas de factores.

Para explicar la sustitución en el consumo partamos de los datos a) y c). Supongamos que en la economía se producen un bien de consumo *A* y un bien de consumo *B*, y que, en el primero, la cantidad de trabajo por unidad de producto es mayor que en el segundo (o que la cantidad de capital por unidad de producto es menor que en el segundo). Si, partiendo de una situación de equilibrio, se genera, por alguna razón, un exceso de oferta del factor trabajo, la competencia entre los trabajadores dará lugar a una reducción de la tasa de salarios. Con la disminución de los costos salariales en el sector productor del bien de consumo *A*, también disminuirá el precio relativo de este bien puesto que posee una mayor cantidad de trabajo por unidad de producto que el sector que produce el bien de consumo *B*. La disminución de este precio relativo incrementará la demanda relativa del bien de consumo *A*, es decir se producirá una sustitución en el consumo de *B* por *A*.

Pero la historia no termina aquí. Para satisfacer la demanda incrementada de *A* los productores respectivos de este bien, aumentarán la producción de *A* en relación a la producción de *B* y, por lo tanto, aumentarán su demanda relativa de trabajo hasta que se igualen la oferta y la demanda, tanto en el mercado de trabajo como en el mercado de bienes de consumo.

De lo anterior se deduce que hay una relación inversa entre la demanda de un factor y su remuneración. Como ha aumentado el uso del factor trabajo, en el nuevo equilibrio la relación capital–trabajo será menor al igual que el ratio salario/ganancia (*w/r*). Los precios relativos, según esta teoría, reflejan la escasez relativa de los factores. El bien de consumo *A* es ahora relativamente más barato que bien de consumo *B* porque está utilizando una mayor proporción del factor trabajo, el cual es relativamente más abundante. El razonamiento es exactamente el mismo en lo que se refiere al factor capital.

Para explicar la sustitución de técnicas en uso por parte de los productores, consideremos ahora los datos b) y c). La idea de que es posible producir un mismo bien o producto con infinitas combinaciones de técnicas posibles, es decir, con diversas proporciones de factores capital y trabajo (*K* y *L*), se basa en la teoría de la productividad marginal. Si la productividad marginal de un factor es mayor que cero y decreciente, un aumento en su oferta dará lugar a un proceso competitivo que conducirá a una reducción de su respectiva remuneración. El resultante nuevo nivel de remuneración del factor será menor que su productividad marginal inicial, lo que incrementará su demanda mediante la adopción de técnicas más intensivas en este factor que la utilizada al inicio. De acuerdo con esta teoría, este proceso de sustitución continuará hasta que se haya restablecido el equilibrio entre la oferta y la demanda del mencionado factor de producción. Hay una relación inversa entre la escasez relativa de los factores y sus precios o remuneraciones.

Ambos procesos de sustitución (entre bienes de consumo y entre factores de producción capital y trabajo) caracterizan la concepción neoclásica del proceso productivo, donde la cantidad de un factor varía inversamente con sus precios relativos, y la distribución del ingreso o de lo producido se determina simultáneamente junto con los precios y las cantidades de los bienes de consumo final.

Para ver la relación de esta teoría de la determinación de precios y cantidades con la teoría neoclásica del crecimiento económico introduzcamos la función de producción bien comportada que incorpora explícitamente la posibilidad de sustitución de factores productivos. Si los precios o remuneraciones de los factores son determinados por sus respectivas productividades marginales, esto significa que, en competencia, el producto debe agotarse cuando a los factores se les paga como remuneración sus productos marginales. Este es el conocido teorema de Euler.

Dada una función linealmente homogénea de grado uno que representa la producción de (Y) con los factores capital (K) y trabajo (L):

$$Y = Lf(K/L);\ \text{o, en términos per cápita: } y = f(k)$$

Se obtienen las productividades marginales de los factores capital y trabajo que son, respectivamente, las siguientes:

$$PMgK = f'(K/L)$$

$$PMgL = f(K/L) - \frac{K}{L} f'(K/L)$$

Multiplicando estas productividades por K y L, y sumando miembro a miembro ambas ecuaciones se obtiene el producto total (Y):

$$K \times PMgK + L \times PMgL = Kf'(K/L) + Lf(K/L) - Kf'(K/L)$$

$$K \times PMgK + L \times PMgL = Lf(K/L) = Y$$

Todas las empresas se encuentran en el límite, más allá del cual cualquier ampliación de la escala de producción sería desventajosa económicamente. Por consiguiente, el pleno empleo de los factores supone beneficios nulos por encima del total de las remuneraciones de los factores.

Si w es la tasa de salarios y r la tasa de ganancia (o de interés), entonces:

$$\frac{1}{w}\frac{\partial Y}{\partial L} = \frac{1}{r}\frac{\partial Y}{\partial K} = \frac{Y}{wL + rK} = 1$$

De esta ecuación, se deduce que:

$$L\frac{\partial Y}{\partial L} + K\frac{\partial Y}{\partial K} = wL + rK$$

En consecuencia:

$$Y = L\frac{\partial Y}{\partial L} + K\frac{\partial Y}{\partial K}$$

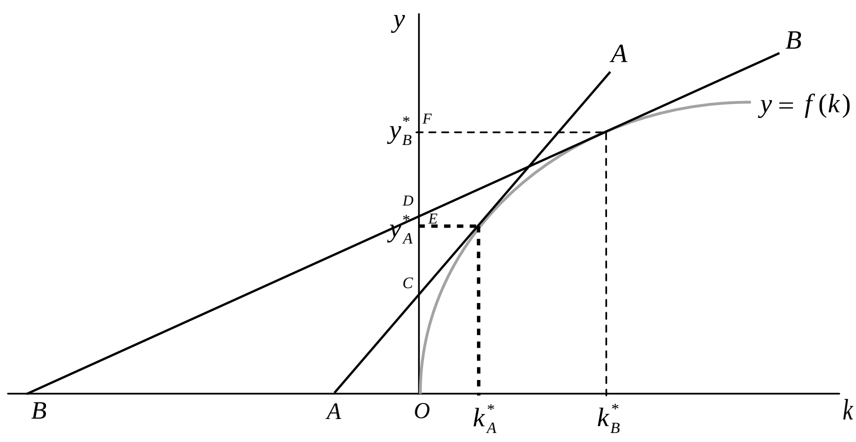
Esta forma de explicar la distribución del producto o ingreso genera dificultades que precisamente fueron destacadas en el debate entre los dos Cambridge (de Inglaterra y de Estados Unidos).

En el gráfico 3.1, las tangentes *AA* y *BB* a la función de producción $y = f(k)$ representan la productividad marginal del capital: esta productividad es mayor cuando el *stock* de capital es menor $f'(k^*_A) > f'(k^*_B)$. Recíprocamente, las tasas de salario son mayores para *stock*s de capital mayores. Es claro que para cada nivel de capital per cápita hay una determinada distribución del ingreso.

Los segmentos *OA* y *OB* representan relaciones entre las tasas de salarios y ganancias (w/r) para diferentes niveles de capital per cápita y de producto per cápita. Es decir: $OA = \frac{w_A}{r_A} < OB = \frac{w_B}{r_B}$. El precio relativo del trabajo es mayor cuando el capital per cápita es mayor o, en otras palabras, cuando la relación trabajo–capital es menor.

Podemos identificar, entonces, dos situaciones. Cuando el capital per cápita es k^*_A, el producto per cápita ($y^*_A = OE$) está constituido por la tasa de salarios per cápita ($w_A = OC$) y los beneficios per cápita ($r_A k^*_A = CE$). De la misma manera, cuando el capital per cápita es k^*_B, el producto per cápita ($y^*_B = OF$) está constituido por la tasa de salarios per cápita ($w_B = OD$) y los beneficios per cápita ($r_B k^*_B = DF$).

Gráfico 3.1
Distribución entre salarios y beneficios



En términos de las ecuaciones del producto per cápita en los dos casos, tenemos:

$y_A^* = w_A + r_A k_A^*$; o, lo que es lo mismo, en términos de segmentos: $OE = OC + CE$

$y_B^* = w_B + r_B k_B^*$; o, lo que es lo mismo, en términos de segmentos: $OF = OD + DF$

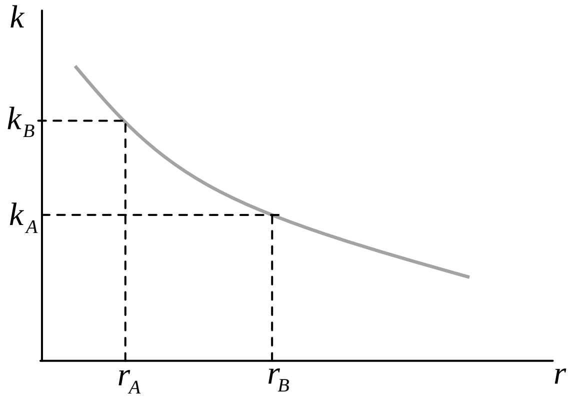
Nótese que: $w_A < w_B$, $k_A^* < k_B^*$, y que $r_A > r_B$. Hay una relación inversa entre la remuneración del factor capital, dada por su productividad marginal, y la cantidad de *stock* de capital. Cuando el capital es más escaso la tasa de ganancia (o de interés) es mayor.

Podemos resumir las principales proposiciones neoclásicas, que justamente fueron las que se cuestionaron durante la controversia sobre el capital, en las siguientes, llamadas también, parábolas neoclásicas:

1) Cuanto mayor es la cantidad de un factor de producción, o cuanto más abundante es, menor debe ser su precio. De aquí se deduce la función de demanda con pendiente negativa.

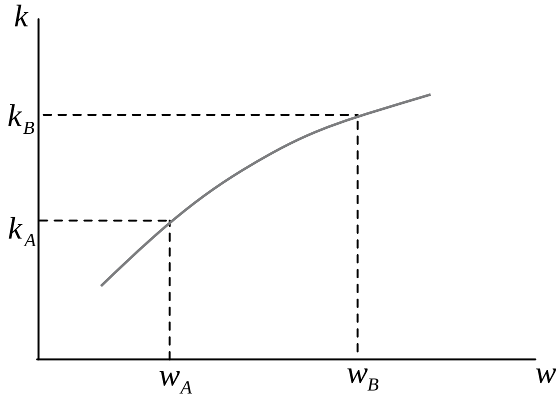
   En otras palabras, existe una relación inversa entre la intensidad de capital o capital per cápita (*K/L*) y la tasa de beneficio (*r*). La función de demanda nos dice que a bajas tasas de beneficio le corresponden técnicas más intensivas en capital.

Gráfico 3.2
Relación inversa entre la intensidad del capital y la tasa de beneficio



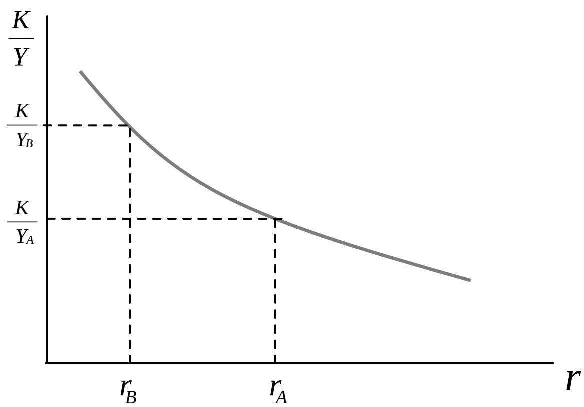
Asimismo, cuanto mayor es el capital per cápita mayor es la tasa de salario. Existe una relación directa entre ambos. Bajas tasas de beneficio indican abundancia relativa del factor capital, por eso, en este caso, el precio del trabajo es relativamente más caro.

Gráfico 3.3
Relación directa entre la intensidad del capital y la tasa de salario



2) Si la intensidad de capital aumenta cuando baja la tasa de beneficio y hay rendimientos marginales decrecientes, la productividad del capital disminuye: el producto aumenta en menor proporción que el capital. Esto quiere decir que bajas tasas de beneficio corresponden altos ratios capital–producto. Existe, por lo tanto, una relación inversa entre la tasa de beneficio (r) y la relación capital–producto (K/Y). Esta última es la inversa de la productividad media del capital.

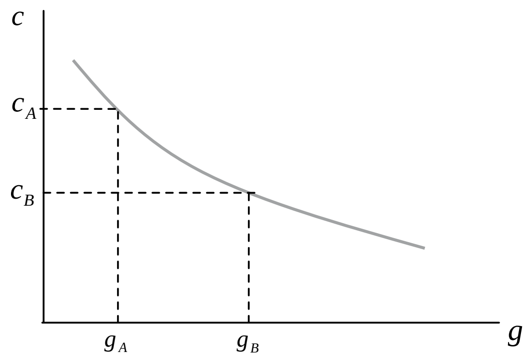
Gráfico 3.4
Relación inversa entre el ratio capital–producto y la tasa de beneficio



3) En el estado estacionario y con «regla de oro de la acumulación» (*golden rule of accumulation*), es decir, cuando se han establecido consumos per cápita máximos (c) para tasas dadas de crecimiento (g), hay una relación negativa entre estas dos

variables. Como la existencia de la regla de oro implica la igualdad entre la tasa de crecimiento y la tasa de beneficio, $g = r$, la relación negativa entre c y g involucra simultáneamente una relación negativa entre c y r.

Gráfico 3.5
Relación inversa entre el consumo per cápita y la tasa de crecimiento



Esta relación inversa se puede mostrar partiendo de la identidad ingreso-gasto en términos per cápita para una economía cerrada:

$y = c + i$; donde c es el consumo per cápita e i es la inversión per cápita.

$$y = c + gk; \text{ donde } i = \frac{I}{K}\frac{K}{L} = gk$$

Diferenciando totalmente, tenemos:

$$dy = dc + gdk + kdg$$

Dividiendo esta ecuación, miembro a miembro entre dk:

$$\frac{dy}{dk} = \frac{dc}{dk} + g + k\frac{dg}{dk}$$

$$r = \frac{dc}{dk} + g + k\frac{dg}{dk}$$

Suponiendo que se cumple la regla de oro, es decir, que: $g = r$, tenemos:

$$\frac{dc}{dk} = -k\frac{dg}{dk}$$

$$\frac{dc}{dg} = -k$$

Como se acaba de señalar, la relación entre el consumo y la acumulación es inversa solo si se cumple la regla de oro, es decir, si el nivel del consumo per cápita es el de la regla de oro.

4) Los factores de producción reciben como remuneración sus respectivos productos marginales. Esta es la teoría de la distribución basada en la productividad marginal. En competencia, la distribución del ingreso entre asalariados y perceptores de beneficios se explica por las productividades marginales del capital y el trabajo que son iguales a la tasa de beneficio y a la tasa de salario, respectivamente. Como se señaló antes, si la función de producción tiene retornos constantes a escala, $Y = F(K, L)$, se puede expresar en términos per cápita como, $y = f(k)$, y la distribución del ingreso de la manera siguiente:

$$PMgL = f(K/L) - f'(K/L)\frac{K}{L}$$

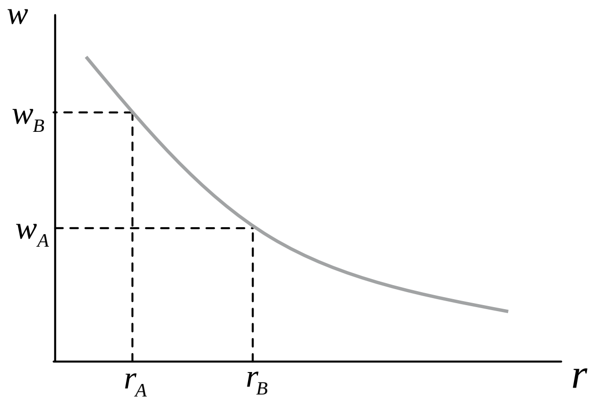
$$w = f(k) - f'(k)k$$

donde $f'(k)$ es la productividad marginal del capital y es igual a la tasa de beneficio r, w es la tasa de salarios, $f(k)$ es el producto per cápita (y), y k es la relación capital–trabajo.

De esta parábola se deriva relación inversa entre la tasa de salarios y la tasa de beneficios. Esta asociación es conocida como la frontera de precios de los factores.

Gráfico 3.6

Frontera de precios de los factores



La pendiente de la frontera de precios de los factores es igual al capital per cápita. La ecuación del producto per cápita también puede expresarse de la forma siguiente:

$$y = w + rk$$

Diferenciando totalmente esta ecuación del producto per cápita y luego dividiendo todos sus términos entre dk, obtenemos:

$$dy = dw + rdk + kdr$$

$$\frac{dy}{dk} = \frac{dw}{dk} + r + k\frac{dr}{dk}$$

Como la productividad marginal del capital $\frac{dy}{dk}$, según la teoría neoclásica, es igual a la tasa de beneficios (r), la ecuación anterior se reduce a:

$$0 = \frac{dw}{dk} + k\frac{dr}{dk}$$

O, lo que es lo mismo:

$$0 = dw + kdr$$

De aquí se obtiene:

$$\frac{dw}{dr} = -k$$

Lo que nos dice esta relación es que la pendiente de la frontera de precios de los factores en el mundo de un solo bien y de una sola técnica es igual al capital per cápita.

Finalmente, se puede afirmar que en cualquier punto de la frontera de precios de los factores, la elasticidad correspondiente expresa la participación relativa de las ganancias respecto a la de los salarios.

Si $-\frac{dw}{dr} = k$, entonces

$$-\frac{dw}{dr}\frac{r}{w} = \frac{r}{w}k = \frac{rK}{wL}$$

En lo que sigue vamos a demostrar por qué, de acuerdo con sus críticos, los conceptos de función de producción agregada y de factor productivo «capital» agregado, no son teóricamente sólidos. Tal como se ha mostrado, la función de producción es utilizada para explicar la distribución del ingreso entre los perceptores de beneficios y salarios en las economías capitalistas, suponiendo que están dados los *stocks* de trabajo y capital y el conocimiento de cómo uno de estos factores puede ser sustituido por otro, de tal forma que sus respectivas productividades marginales son conocidas. Joan Robinson sostiene: «esta forma de ver las cosas desvió la atención del análisis de las fuerzas que determinan el crecimiento del capital y el trabajo y de cómo el progreso técnico afecta el crecimiento, la acumulación y las participaciones en el ingreso» (Harcourt 1969: 370).

2. Las críticas de Robinson y Garegnani a la teoría neoclásica

La controversia sobre la teoría del capital se inició con la crítica de Joan Robinson a la teoría neoclásica. En especial, Robinson cuestiona la forma de medir el factor de producción capital (*K*) y su inclusión en la función de producción agregada neoclásica. Por otro lado, Pierangelo Garegnani critica la teoría de la productividad marginal y llega a la misma conclusión de Joan Robinson: independientemente de la unidad en términos de la cual se mide el valor de los bienes de capital, dicho valor no es independiente de los cambios de la distribución entre la tasa de salarios y la tasa de ganancia.

La crítica de Joan Robinson a la función de producción neoclásica

Joan Robinson en su artículo «The Production Function and the Theory of Capital» (1953-1954) hizo una crítica lapidaria al uso del factor capital agregado dentro de la función de producción. Es necesario saber cuál es la cantidad de este factor para determinar su tasa de ganancia, pero para conocer dicha cantidad se requiere antes saber cual es esa tasa de ganancia. Según la teoría neoclásica no se pueden determinar los precios de los factores si no se conocen las cantidades de estos factores. Esta es su principal diferencia con la economía clásica de Ricardo y Smith, según la cual, dada la distribución y la tecnología, los precios quedan determinados[1].

[1] El problema que la controversia sobre la teoría neoclásica del capital destaca, es el del significado de la productividad marginal de este factor cuando existen en la economía varios bienes de capital. Como en términos físicos el producto marginal de este factor no dice nada, se le concibe a la Clark (1899): «Podemos pensar el capital como una suma de riqueza productiva, invertido en cosas materiales los cuales están permanentemente cambiando —que van y vienen continuamente- aunque el fondo permanece—. El capital así vive, por así decirlo, mediante la transmigración, despojándose de un conjunto de cuerpos e incorporándose en otro, una y otra vez» (Clark 1899: 119-120).

La función de producción según Joan Robinson

Joan Robinson señala:

> La función de producción ha sido un poderoso instrumento de mala educación. Al estudiante de teoría económica se le enseña a escribir $Y=F(K,L)$, donde L es la cantidad de trabajo, K una cantidad de capital y Y una cantidad de producto de mercancías. Se le enseña a suponer que todos los obreros son homogéneos y a medir L en horas de trabajo por hombre; algo se le dice acerca del problema relativo a los números índice, que surge al escoger una unidad de producto. Pero luego se lo arrastra hasta el siguiente problema, en la esperanza de que olvide preguntar en qué unidades se mide K. Antes de que se le haya ocurrido hacerlo, ya se ha convertido en profesor. Así, tales hábitos poco rigurosos de pensamiento se transmiten de una generación a otra (1953-1954: 81).

Los problemas en la medición del capital

Como el capital es una variable heterogénea frente al resto de factores, tierra y trabajo, hay que resolver el tema de cómo medirlo y agregarlo para luego incorporarlo en la función de producción. En relación a las unidades en que se mide el factor capital, Joan Robinson señala varias posibilidades. Dice, por ejemplo, que podría tratarse como «parte del ambiente en que trabaja la mano de obra». Este sería el procedimiento correcto para el corto plazo; y, en este caso, la función de producción estaría referida solo al trabajo. Pero, para el largo plazo, este procedimiento ya no es correcto porque significaría que no podemos distinguir un cambio en el acervo de capital de un cambio fortuito en el estado del tiempo. De otro lado, si el acervo de capital es considerado como una lista de todos los bienes específicos existentes en un momento dado, también este procedimiento sirve solo para el corto plazo porque cualquier cambio en la proporción capital–trabajo implica una modificación de los métodos de producción y esto requiere un cambio de las especificaciones de muchos o todos los bienes de la lista original (Robinson 1953-1954: 81).

Las dificultades son mayores si se abandona el corto plazo. En el largo plazo es ineludible saber qué se entiende por capital y por los cambios en el capital. Joan Robinson discute antes algunas rutas para la medición de capital físico: primero, la valuación del capital de acuerdo con su capacidad de proporcionar ingresos (ganancias) en el futuro; segundo, valuar el capital según sus costos de producción; finalmente, medir el capital en términos de tiempo de trabajo.

La valuación del capital de acuerdo con su capacidad de proporcionar ingresos (ganancias) en el futuro

En este caso, —«si se conoce la cantidad esperada de producto futuro asociado a cierto bien de capital, y los precios y costos esperados»— el capital aparecería como el resultado de una corriente descontada de las ganancias que produciría en el futuro y esto supone que debemos conocer la tasa de interés. Pero hay que considerar que el propósito de la función de producción neoclásica es mostrar cómo las condiciones técnicas y las proporciones de los factores de producción determinan la tasa de salarios y la tasa de interés o de ganancia (Robinson 1953-1954: 81).

Valuar el capital según sus costos de producción

La autora sostiene que es irrelevante utilizar el costo de producción monetario si no se puede especificar el poder adquisitivo del dinero. También puede establecerse el costo de los bienes de capital en términos de unidades salario que equivale a medirlo en términos de una unidad de trabajo estándar. La capacidad productiva del capital consistiría en el hecho de que una unidad de trabajo gastada en cierto momento del pasado vale más ahora que una unidad gastada hoy, «porque sus frutos ya están maduros» (Robinson 1953-1954: 82). Pero, dice Joan Robinson, «una unidad de trabajo nunca se gasta en forma pura. Todo trabajo se hace con la ayuda de bienes de una u otra clase […]. El costo del capital incluye el costo de los bienes de capital, y puesto que tales bienes deben construirse antes de que puedan utilizarse, parte del costo del capital es interés durante el período que media entre el momento en que se empieza a construirlo y el momento en que empiezan a generar una corriente de productos» (Robinson 1953-1954: 82).

Medir el capital en términos de tiempo de trabajo

Finalmente, si todavía fuera posible medir el capital en términos de tiempo de trabajo —dice Joan Robinson— no se podría precisar de qué unidades se compone este factor capital. Cuando se considera el proceso de acumulación (la abstención del consumo presente a fin de aumentar el *stock* de riqueza), «es natural pensar que el capital se mide en términos de producto». Pero cuando se considera cuál es la adición a los recursos productivos hecha por un monto dado de acumulación, «debemos medir el capital en unidades de trabajo porque el aumento del *stock* de equipo productivo efectuado por el incremento de capital depende de la cuantía de trabajo empleado para construirlo y no del costo, en términos de producto final, del trabajo de una hora» (Robinson 1953-1954: 82).

Por consiguiente, cuando nos movemos de un punto de la función de producción a otro, si se mide el capital en términos de producto, «tenemos que conocer el cociente producto/salario para determinar el efecto sobre la producción del cambio en la relación capital–trabajo. Si se mide en términos de unidades de trabajo, debemos conocer el cociente producto/salario para determinar la cuantía de la acumulación requerida para producir un incremento dado del capital. Pero, la tasa de salario se altera con la razón de factores»; por lo tanto, el capital que se incorpora en la función de producción no puede significar a la vez una cantidad de producto y una cantidad de tiempo de trabajo (Robinson 1953-1954: 82).

La medición del capital en la teoría neoclásica y su dependencia del equilibrio

Para Joan Robinson es claro que el capital concebido como factor productivo le genera un enorme problema a la teoría neoclásica. Los bienes de capital, siendo productos, tienen valores que dependen de sus respectivos costos de producción. Además, la competencia implica que el ingreso destinado a los propietarios de estos bienes, debe distribuirse en razón del valor de los mismos y dar lugar a una tasa de ganancia (o de rendimiento) uniforme para todas las clases o tipos de bienes de capital.

«Los bienes de capital en existencia en un momento del tiempo son todos los bienes en existencia en ese momento» y estos bienes se caracterizan por tener valor. Para expresar esta lista de bienes individuales como *cantidad de bienes* «podemos hacerlo en términos del costo real de producirlos —es decir, del trabajo y de los bienes preexistentes necesarios para fabricarlos— o en términos de su valor expresado en alguna unidad de poder de compra, o de acuerdo con su productividad —es decir, de acuerdo al *stock* de bienes que existirá en el futuro si se trabaja en conjunción con el *stock* existente actualmente.

En una posición de equilibrio los tres métodos producen resultados equivalentes, hay una cantidad que puede expresarse con un número u otro cambiando la unidad de medida. Esta es la definición de equilibrio». Pero si se produce el desequilibrio por un acontecimiento inesperado, ninguna manipulación de unidades podrá volverlas equivalentes. «La ambigüedad de la concepción de una cantidad de capital está relacionada con un profundo error metodológico que hace espuria a la mayor parte de la doctrina neoclásica» (Robinson 1953-1954: 83-84). Más adelante, Joan Robinson afirma: «El neoclásico considera una posición de equilibrio como aquella hacia la que tiende a avanzar una economía a través del tiempo. Pero es imposible que un sistema avance hacia una posición de equilibrio, porque la naturaleza misma del equilibrio es que el sistema ya se encuentra en él y ha estado allí durante cierto tiempo» (Robinson 1953-1954: 85).

La determinación del valor del *stock* de capital y la tasa de interés

Para Joan Robinson, entonces, el valor del *stock* concreto de los bienes de capital depende de la tasa de ganancia y de la cantidad de «capital». No se puede determinar la distribución del ingreso y los precios si previamente no se conocen estos para medir el capital. No se puede distinguir entre los cambios en las condiciones de producir un nivel dado de producto cuando la cantidad de capital cambia, de los cambios en el valor de este capital debido a las variaciones en los salarios y beneficios. Los cambios en la relación capital–trabajo ocurridos a lo largo del tiempo no se pueden analizar independientemente de la distribución, porque «el valor del volumen de capital puede cambiar en el tiempo debido a un cambio en la distribución, por lo tanto, no estaríamos comparando las mismas cantidades» (Robinson 1953-1954: 87-89).

Joan Robinson dice que «el postulado neoclásico afirma que, en el largo plazo, la tasa de salario tiende a ser tal que toda la mano de obra disponible se emplea. [...] A fin de satisfacer el postulado neoclásico del pleno empleo, la cantidad dada de capital debe emplear la cantidad dada de mano de obra» (Robinson 1953-1954: 96). «La condición de que la cantidad de capital dada emplee la cantidad de mano de obra dada implica, por lo tanto, una tasa de ganancia particular. Pero el valor del acervo de bienes de capital concretos es afectado por esta tasa de ganancia, y la cantidad de capital con que principiamos no puede definirse en forma independiente de ella» (Robinson 1973: 58).

En resumen, si la tasa de ganancia o rendimiento uniforme se analiza desde el punto de vista de la teoría neoclásica, los bienes de capital deben considerarse como homogéneos para poder representar el único factor capital. Después se puede hablar de oferta y demanda para determinar la tasa de rendimiento o de ganancia de equilibrio. Pero como conjunto de valor, el capital no queda definido sino hasta que no se determine la unidad con la que se va a medir. Esto es lo que destaca Joan Robinson en su crítica a la teoría neoclásica del capital. El factor capital debe ser medido en forma independiente del sistema de precios. Pero esto no es posible. El valor de los bienes de capital empleado cambiará con la tasa de interés: primero, variaciones en valor y no física, según la unidad de valor. Segundo, variaciones físicas sea por cambio en proporciones o en técnicas. ¿Cuál será la relación definitiva entre el valor del capital y la tasa de interés?

La inutilidad de la función de producción neoclásica

Finalmente, la función de producción neoclásica deja de ser útil para la determinación de la distribución del producto entre salarios y beneficios porque no puede distinguir entre capital en el sentido de medios de producción específicos y capital en el sentido de medios de financiamiento. La función de producción deja de ser útil para el análisis del proceso de acumulación porque no puede distinguir entre las comparaciones de situaciones de equilibrio y los movimientos de una situación de equilibrio a otra.

Cuando consideramos las expectativas, una baja imprevista de la tasa de ganancia rompe las condiciones de equilibrio, dice Joan Robinson:

> Los capitalistas que operan con fondos prestados ya no pueden obtener el interés que se obligaron a pagar, y aquellos que operan con capital propio se encuentran en posesión de un tipo de planta que no hubieran construido de saber lo que ocurriría con la tasa de ganancia. [...] Así, los supuestos de equilibrio se enredan en contradicciones cuando se aplican al problema de la acumulación que avanza en el tiempo con una relación cambiante de factores. [...] Si se arguye que la acumulación prosigue aun ante expectativas de tasa de ganancia descendente, toda la base del análisis se complica inmensamente. Ya no podemos razonar suponiendo la existencia de una única tasa de interés. Existe un conjunto de tasas de interés para préstamos de maduraciones diferentes [...]. Además, el ritmo a que la tasa de ganancia disminuye a medida que la proporción de factores aumenta, está dictado por condiciones técnicas. Puede suponerse que la curva de la proporción entre factores es al inicio empinada, y la tasa de ganancia desciende lentamente. Luego describe una giba, con una caída rápida de la tasa de ganancia, para achatarse nuevamente después con una tasa de ganancia inferior pero en descenso más lento (Robinson 1953-1954: 100).

El capital en la teoría de la productividad marginal según Garegnani

Pierangelo Garegnani en su libro *Il capitale nelle teorie della distribuzione* (1972), luego de examinar la teoría Ricardiana, analiza de manera exhaustiva la teoría de la productividad marginal. Dice que:

> La teoría de la productividad marginal surgió de una generalización de la teoría clásica de la renta. La teoría de la renta le sirvió a Ricardo para poder aislar la parte del producto social que debe dividirse entre trabajadores y capitalistas, y para poder utilizar la teoría del excedente en la determinación de lo que le interesaba más: la tasa de ganancia. La teoría de la productividad marginal, por el contrario, determina la división del producto entre capitalistas y trabajadores por medio de una generalización de la teoría de la renta. Así se evita el tener que recurrir al concepto de excedente. Los clásicos consideraban la proporción entre tierra y trabajo (auxiliados por medios de producción) como un factor determinante de la división del producto entre la renta de la tierra y la remuneración del *trabajo-con-capital*. Los marginalistas introducen la proporción entre capital y trabajo para determinar en forma análoga, el nivel de salarios y ganancias (Garegnani 1972: 79-80).

Esto implica, evidentemente la necesidad de considerar el capital como una magnitud única que se pueda medir independientemente de las variaciones de la distribución. Esta concepción unitaria del capital en la teoría marginalista es adoptada porque, en equilibrio, la tasa de ganancia debe ser uniforme para todas las formas de «capital». Esta concepción unitaria no es esencial en la teoría de Ricardo. La teoría marginalista entra así en un callejón sin salida. Garegnani continúa:

> El problema de la medición del capital en la teoría Ricardiana surge de la necesidad de expresar, en forma independiente de las variaciones de la distribución, los valores de los agregados de mercancías que determinan la tasa de ganancia. [...] Este tipo de análisis, para Ricardo, se basaba en la consideración de la tasa de salario (concebido como un conjunto de bienes salario), como una variable independiente de la ecuación que determinaba las ganancias (1972: 81).

Por el contrario, según Garegnani, en la teoría de la productividad marginal, el salario —en cualquier forma que se mida— representa una incógnita de la misma forma que la tasa de ganancia; por lo tanto, ya no tiene ningún significado en la determinación de las ganancias como excedente. El autor sostiene que, en cualquier empresa o industria que produce una mercancía homogénea:

> La distribución del producto entre factores se puede estudiar en base a una función de producción que exprese la relación entre cantidad física del producto y la cantidad de factores de producción utilizados. El problema de valor surge en la teoría de la distribución cuando se estudia toda la economía y la distribución de las cantidades disponibles de factores entre las industrias: se deberá introducir entonces la condición de que el valor del producto marginal de un factor sea el mismo, cualesquiera sea la mercancía en cuya producción se utiliza. Con este fin será necesaria la determinación simultánea del sistema de valores relativos de mercancías (Garegnani 1972: 82).

Como ya se ha mencionado, de acuerdo con la teoría neoclásica la remuneración de los factores de producción (capital y trabajo) se determina simultáneamente con el sistema de valores relativos de las mercancías sobre la base de los siguientes datos[2]:

a) Gustos y preferencias de los consumidores
b) Técnicas de producción que se expresan con funciones de producción de cada mercancía
c) Cantidad de factores de producción disponibles en la economía en una situación dada.

[2] En los clásicos la teoría de los precios está separada de la teoría de la producción. La primera, es decir la teoría de los precios, parte de los siguientes datos: a) el tamaño y la composición del producto; b) la tecnología; y c) el salario real.

Garegnani sostiene que el problema de la medición del capital en la teoría de la productividad marginal surge en relación con los datos: b) técnicas de producción dadas, y c) cantidad dada de factores.

> Es necesario que las cantidades de los factores que constituyen datos del grupo c) y las que aparecen como variables en las funciones de producción (datos de b), puedan medirse independientemente de las variaciones de la distribución del producto social. Es decir, es necesario que dichas cantidades puedan definirse sin que haya que conocer de antemano los precios de los factores y, en forma más general, el sistema de valores relativos. Este requisito es necesario para evitar un razonamiento circular (Garegnani 1972: 83).

Garegnani nos recuerda que este requisito se cumple solo cuando se consideran a los factores trabajo y tierra. Pero cuando se considera al factor capital, el razonamiento circular es inevitable. El autor señala:

> El concepto de capital es un conjunto de bienes heterogéneos (reserva de materias primas; las existencias de productos terminados en los almacenes de los fabricantes o distribuidores; bienes en proceso de producción; maquinarias, etc.). Lo que tienen en común y que indujo a considerarlos como capital se puede reducir a dos características:
>
> a) Todos estos bienes se producen conforme a principios económicos válidos para la producción de cualquier otra mercancía.
>
> b) Estos bienes se consumen durante el proceso económico de producción de otros bienes y deben poder ser sustituidos en un período de tiempo suficiente para garantizar una tendencia hacia una relación uniforme, definida por la tasa de interés, entre sus costos de producción y el valor del producto o ingreso que pertenece a sus respectivos propietarios (Garegnani 1972: 84).

De aquí Garegnani concluye: «Los bienes de capital tienen, por lo tanto, la cualidad común de ser Valor. Es en términos de valor que se mide el capital en la práctica económica y de este concepto práctico de capital la teoría económica ha tomado prestada la concepción de factor de producción "capital"» (1972: 84-85).

Hemos llegado al mismo punto al que llegó Joan Robinson. Como señala Garegnani, cualquiera sea la unidad en términos de la cual se mide el valor de los bienes de capital, dicho valor no cumple la condición de ser independiente de los cambios de la distribución; cambiará ese valor cuando cambien la tasa de salarios y la tasa de ganancia, permaneciendo constantes todo lo demás. Estamos, pues, frente a un razonamiento circular advertido por el propio autor anteriormente.

El factor capital desempeña dos papeles importantes en la teoría neoclásica de la distribución y el crecimiento. En primer lugar es una variable en la función de producción, junto con el factor trabajo; y en segundo lugar es una cantidad de factor (capital) disponible en la economía.

En el primer papel, dice Garegnani:

> Cuando el capital se mide en términos de valor, dada las cantidades de los demás factores, la misma técnica y la misma cantidad física del producto podrían ser compatibles con distintas cantidades de capital-valor; o bien dadas las cantidades de los demás factores, un mismo capital-valor podría ser compatible con muchas técnicas descritas por la función de producción y con diversas cantidades físicas de producto, con tal que se varíen en forma adecuada las tasas de salario y de ganancia, supuestas al calcular el valor de los bienes de capital (1972: 85).

De este razonamiento, Garegnani infiere que ya no hay una relación unívoca entre cantidad de capital y cantidad física de producto, pues esa cantidad varía al variar la distribución, y variará en forma diversa según la mercancía que se utilice como medida: puede aumentar o disminuir. Este resultado está en abierta contradicción con el postulado de la productividad marginal dice Garegnani. Él se pregunta: «si, manteniendo constante la cantidad de los demás factores, el "capital" varía, pero el producto físico no varía, ¿deberíamos decir que la productividad marginal del capital es cero con aquella combinación de factores?» (Garegnani 1972: 86).

Su crítica a la medición del capital cuando este es considerado una variable en la función de producción, la concluye con la elocuente afirmación siguiente: «El producto marginal de capital como suma de valores podrá tener algún significado para el productor individual que considere como dado el sistema de valores relativos; pero no puede tener ningún significado a nivel de una teoría de la distribución y del valor» (1972: 86).

A modo de resumen podemos afirmar —de acuerdo con Garegnani— que hay dos requisitos en la medición del capital en la teoría de la productividad marginal. El primero es que la «cantidad de capital» correspondiente a un agregado dado de bienes de capital, no varíe con los cambios en la distribución. Respecto al segundo requisito que la medición del capital debe satisfacer, Garegnani sostiene:

> Para la magnitud que mide el capital en forma independiente de la distribución, debe ser posible postular una relación conocida con la suma de los valores (en términos de cualquier mercancía) de bienes de capital a la que corresponde. [...] Para justificar este requisito basta recordar que la productividad marginal del capital debe permitirnos determinar la tasa de ganancia o de interés; por esto el valor del producto marginal debe relacionarse con el valor de la correspondiente unidad marginal de capital: si no se puede postular una relación entre la magnitud que mide el capital y el valor del correspondiente agregado de bienes de capital, no se puede determinar tampoco la tasa de ganancia o de interés (1972: 87-88).

Si este requisito no se cumpliera, no sería posible construir una función de producción.

> La función de producción [...] puede ser definida como la función que da la cantidad mínima de un factor compatible con un producto físico dado y con cantidades dadas de todos los demás factores. [...] ¿Por qué incluir en la función de producción solo aquellas combinaciones de factores técnicamente posibles? La respuesta es obvia: la misma cantidad de un bien puede sin duda producirse con diferentes cantidades de un solo factor, dada la cantidad de los otros factores, pero ningún empresario utilizaría tres unidades de un factor si puede obtener el mismo producto con dos unidades. Esta afirmación es válida, sin embargo, solo cuando se puede postular que el costo para el empresario de tres unidades es siempre mayor que el de dos, cualquiera que sea el sistema de precios relativos. En el caso del capital esto ya no puede postularse cuando, por ejemplo, si se tomase como unidad de medida el peso: si un empresario puede obtener la misma cantidad de producto con dos conjuntos alternativos de bienes de capital, completamente diferentes, que pesan respectivamente dos y tres toneladas, no hay razón por la que siempre se debe elegir el primero que el segundo: no existe relación definida entre peso y valor relativo (1972: 87-88).

Finalmente, en relación a la crítica de la medición del capital cuando este es considerado una cantidad de factor (capital) disponible en la economía, Garegnani dice que, cuando se elige bienes de capital de distinto tipo como datos del sistema de equilibrio general (la ruta de Walras), es imposible satisfacer la condición de una tasa uniforme de rendimiento neto sobre todos los tipos de bienes de capital. También menciona la ruta seguida por Wicksell. Al abandonar la medición de capital como período promedio de producción e introducir en su lugar un conjunto de períodos absolutos de producción, Wicksell se ve forzado a medir el capital disponible en la economía en términos de valor, y con ello su teoría de la distribución adolece del razonamiento circular mencionado anteriormente. Las teorías de Walras y de Wicksell son tratadas extensamente por Garegnani en los cinco últimos capítulos de la segunda parte de su libro (Véase Garegnani 1972: 91-183).

3. La respuesta fallida de Samuelson y la curva salario-beneficio

Ante las críticas llevadas a cabo por los economistas de la universidad de Cambridge del Reino Unido, Paul Samuelson publica un artículo en 1962 en el cual presenta el concepto de función de producción sustituta construida supuestamente con capital heterogéneo con el objetivo de validar la función de producción neoclásica. Sin embargo, la construcción de Samuelson solo tiene sentido en una situación particular (un modelo de un solo bien) y no puede ser generalizada.

El intento de Samuelson de justificar el uso de la función de producción neoclásica

Paul Samuelson, en su artículo «Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function» (1962), intenta demostrar la validez de las proposiciones neoclásicas sobre la productividad marginal mediante una función de producción, que él llama «sustituta», porque incorpora un factor capital «sustituto» que, junto con la mano de obra, genera el producto total. En otras palabras, trata de validar el uso neoclásico de capital homogéneo y de su función de producción, con lo cual se habrían superado las críticas radicales a estos conceptos, explicitadas en el debate de los dos Cambridge.

> **Parábola y realismo en la teoría del capital**
>
> «He insistido muchas veces en escritos y conferencias sobre el punto de que la teoría del capital puede desarrollarse rigurosamente, no usando ningún concepto de "capital" agregado a la manera de Clark, sino sobre la base de un análisis completo de numerosísimos bienes de capital físicos y procesos heterogéneos a través del tiempo» (Samuelson 1962: 193).

La función de producción sustituta y la frontera de precios de factores

La función de producción «sustituta» fue derivada partiendo de una «frontera de precios de factores» que construyó utilizando «capital heterogéneo». Samuelson, partiendo precisamente de un mundo de capital heterogéneo, enfrenta las críticas efectuadas por Joan Robinson a las proposiciones centrales de la teoría neoclásica. Estas proposiciones derivadas de un factor capital homogéneo y maleable, serían exactamente las mismas que las obtenidas partiendo de una gran variedad de bienes de capital específicos. Por lo tanto, la función de producción puede expresarse en términos de una sola mercancía: el «capital» y el producto serían homogéneos y medidos en las mismas unidades, la función de producción sería una función homogénea de primer grado (o con rendimientos constantes a escala) y los factores recibirían como pago una remuneración equivalente a su producto marginal.

Samuelson concentra su análisis en la frontera de precios de los factores que él construye, para rehabilitar las siguientes proposiciones neoclásicas de la teoría de la distribución:

a) La relación inversa entre la tasa de beneficios (r) y el valor del capital por trabajador, o capital per cápita, (k).

b) La relación directa entre la tasa de salarios (w) y el capital per cápita (k).

c) La relación inversa entre la tasa de beneficios (r) y la tasa de salarios (w).

d) La pendiente en cualquier punto de la curva de salario-beneficio, es igual a la relación capital–trabajo agregado.

e) La elasticidad de la curva de salario–beneficio en cada uno de sus puntos expresa la distribución del ingreso o las participaciones relativas de los ingresos del capital y el trabajo.

En términos matemáticos, si $y = f(k) = w + rk$ es la función de producción neoclásica en términos per cápita, las parábolas se pueden formular como sigue:

a) $r = f'(k)$ y $\partial r / \partial k = f''(k) < 0$

b) $w = f(k) - kf'(k)$ y $\partial w / \partial k = -kf''(k) > 0$

c) $\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{-kf''(k)}{f''(k)} = -k < 0$ (Nótese que $\dfrac{\partial r}{\partial k} = f''(k)$ y $\dfrac{\partial w}{\partial k} = -kf''(k)$)

d) $-\dfrac{\partial w}{\partial r} = k$

e) $\dfrac{r}{w}\dfrac{\partial w}{\partial r} = \dfrac{r}{w}k = \dfrac{r}{w}\left(\dfrac{K}{L}\right)$

La representación de estas proposiciones puede verse en el gráfico 3.7. ¿Cuál es el procedimiento que sigue Samuelson para derivar su función de producción «sustituta»? Lo que hace es construir una frontera de precios de los factores, capital y trabajo, que constituye una relación de variación inversa entre el nivel de los salarios y el del beneficio. Esta frontera —cuya existencia según Samuelson ha sido consignada por una serie de autores con von Thünen, Joan Robinson y Piero Sraffa— le permite inferir las parábolas o proposiciones neoclásicas.

Los supuestos

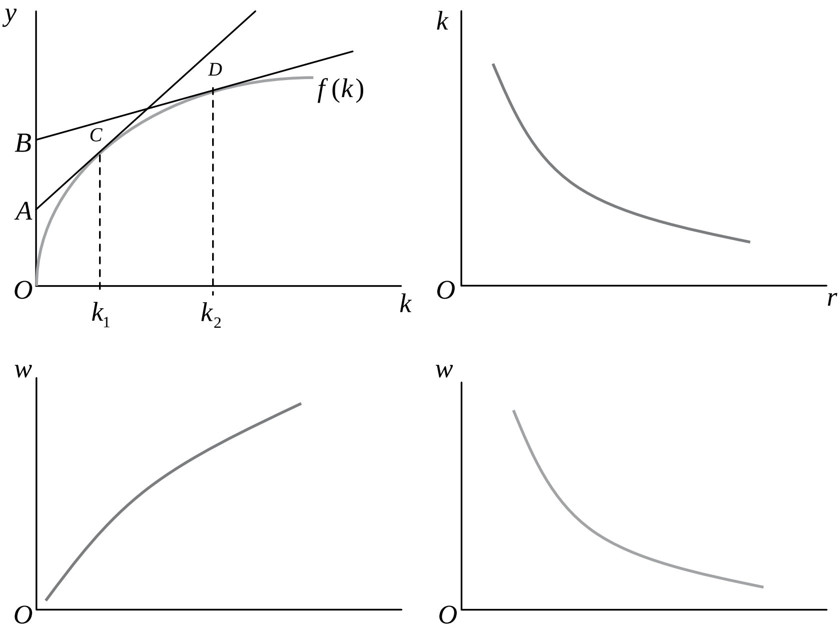
Samuelson asume que existen ciclos de producción anuales y que la sociedad produce solo una clase de bien o producto final homogéneo. Así, la acumulación es igual a cero. Existen muchos sistemas de producción: *A, B, C, D,* … , etcétera, que operan con rendimientos a escala constantes[3]. También se supone la existencia de conocimiento

[3] «No deberíamos hablar —dice Samuelson— en ningún caso de *la* función de producción, sino más bien de numerosas funciones de producción distintas entre sí correspondientes a cada actividad y no necesariamente dotadas de propiedades de sustitución continuas. Sería posible compilar el conjunto de la tecnología de la economía en todo un libro compuesto por tales funciones de producción figurando en cada página el programa destinado a una actividad determinada. Es fácil abarcar el cambio técnico

perfecto, una condición apropiada «para un mercado de competencia perfecta, el cual está desprovisto de toda dominación monopólica o monopsónica» (Samuelson 1962: 194)[4].

Cada uno de los sistemas produce un bien de consumo (c) y un bien de capital (K), y cada bien de capital se relaciona con una cantidad fija de trabajadores «y tiene un tipo de utilización tan específico como se quiera». Los bienes de consumo producidos en cada sistema de producción son los mismos, mientras que el bien de capital no. Es decir, hay una amplia gama de bienes de capital (K^a, K^b, K^c, K^d, … , etcétera) y solo un bien de consumo. La tasa de depreciación (δ) es común para todos los sistemas.

Gráfico 3.7
Las parábolas neoclásicas



incorporando nuevas opciones y nuevos programas al libro, pero para simplificar supondré que el conocimiento técnico permanece invariable » (Samuelson 1962: 194).

[4] Este supuesto deja de lado el papel de las expectativas de los empresarios que, de acuerdo a los keynesianos de Cambridge–Inglaterra, es un factor decisivo en sus decisiones debido al contexto de incertidumbre. No hay función de inversión, por lo tanto las expectativas de los inversionistas no desempeñan ningún papel en la determinación del crecimiento de la economía.

El modelo

Cada sistema de producción solo tiene ecuaciones de precio porque no hay inversión neta. Por ejemplo, las ecuaciones de precios para el sistema *A* son dos, como en todos los otros sistemas: una de precios de bienes de consumo y otra de precios de los bienes de capital. Estas ecuaciones son:

(I) $1 = (\delta + r)\ \alpha p + w\beta$ Sector de bienes de consumo

(II) $p = (\delta + r)\ ap + w\beta$ Sector de bienes de capital

El bien de consumo es el numerario: $p_c = 1$ y $p = p_k / p_c$; w es el salario real por trabajador, r es la tasa de beneficio; α y a son el número de bienes de capital requeridos por unidad de producto del bien de consumo y del bien de capital, respectivamente; β y b son la cantidad de trabajo necesario por unidad de producto del bien de consumo y del bien de capital, respectivamente. Se asume que la depreciación es una fracción constante δ del *stock* de capital que se reemplaza en cada período de producción. Esta fracción es la misma para todas las técnicas de producción y $0 < \delta <1$.

De las ecuaciones (I) y (II), se obtiene la función de salario–beneficio del sistema A:

$$\text{(III)}\quad w = \frac{1 - a(r+\delta)}{\beta + (r+\delta)(\alpha b - a\beta)}$$

La forma de la función de salario–beneficio (que sea no lineal o lineal) depende de la diferencia entre las composiciones orgánicas existentes en el sector de bienes de consumo y de bienes de capital, es decir, entre las relaciones capital–trabajo en la producción de bienes de consumo y en la producción de bienes de capital.

$$\text{(IV)}\quad w = \frac{1 - a(r+\delta)}{\beta + (r+\delta)b\beta(\frac{\alpha}{\beta} - \frac{a}{b})}$$

En la ecuación anterior, esta diferencia aparece como: $(\alpha / \beta) - (a / b)$. La relación capital–trabajo en el sector de bienes de consumo es: $(\alpha / \beta) - (K^a_C / L^a_C)$ y la relación capital–trabajo en el sector de bienes de capital es: $(a / b) - (K^a_K / L^a_K)$.

La diferencia puede ser mayor o menor que cero, con lo cual la función de salario–beneficio puede ser cóncava o convexa al origen. Samuelson no utilizó esta función general porque asumió que $\beta = b$ y $\alpha = a$; por lo tanto, supuso no solo la existencia de una «composición orgánica uniforme» en ambos sectores, sino que todos los sistemas de producción tienen los mismos coeficientes de insumos o de requerimientos de capital y trabajo para producir una unidad de producto final. Con este supuesto convirtió las funciones de salario–beneficio de todos los sistemas en rectas. Es decir, todos y cada uno de los sistemas de producción tienen funciones salario–beneficio de la misma forma que la representada por $w = (1 / \beta) - (a / \beta)\ (r + \delta)$. Como $\alpha = a$, entonces $w = (1 / \beta) - (\alpha / \beta)\ (r + \delta)$, donde la pendiente representa la relación capital–trabajo en el sistema de producción *A*.

Podemos graficar la recta salario–beneficio para cada uno de los sistemas o técnicas de producción (*A*, *B*, *C*, *D*, ...) y, a partir de aquí construir, simultáneamente, la función de producción «sustituta». Nótese que la pendiente de la recta $w - r$ en cualquier técnica o sistema de producción es igual a su respectivo ratio capital–trabajo agregado (k). Los sistemas de producción se pueden diferenciar ahora por las distintas magnitudes de las pendientes (relación capital–trabajo) de sus funciones o rectas salario–beneficio. Se pueden graficar estas rectas en el plano (r, w) para cada uno de los sistemas *A*, *B*, *C*, *D*, etcétera. Como podrá apreciarse en el gráfico 3.8, el sistema *A* tiene la menor relación capital–trabajo. La magnitud de esta relación aumenta a medida que avanzamos (siguiendo las letras del alfabeto) de un sistema a otro.

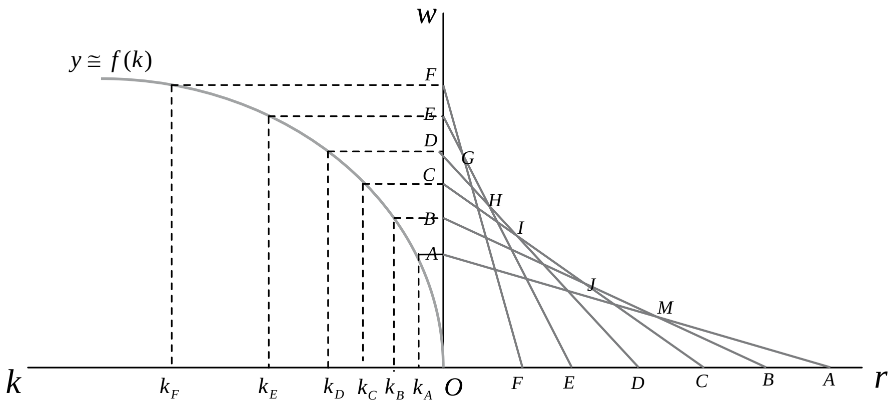
Frontera de precios de los factores y cambio técnico

[...] al producirse un cambio tecnológico efectivo, la frontera se desplazará hacia el noreste, haciendo posible tasas de salario reales más altas con la misma tasa de ganancia, o tasas de ganancia más elevadas con el mismo salario real, o tasas más altas de ganancia y salario a la vez. [...] En el caso tal especial en que dos economías tienen exactamente la misma frontera de precios de los factores, por muy diferentes que puedan ser sus tecnologías, podemos tratarlas como equivalentes en cuanto a las predicciones a formular sobre las propiedades a largo plazo de sus tasas de interés y de salario. Y, lo que puede resultar más útil, si dos economías tienen aproximadamente las mismas fronteras dentro de un ámbito determinado, podemos usar cualquiera de ellas para predecir las propiedades a largo plazo de la otra dentro de dicho ámbito (Samuelson 1962: 196).

El intercepto de la recta salario–beneficio representa el producto per cápita (producción de bienes de consumo por unidad de trabajo) del respectivo sistema de producción. Por otra parte, cuando la tasa de salario es cero (solo teóricamente) todo el producto per cápita es equivalente a las ganancias brutas per cápita.

Las rectas salario–beneficio graficadas para cada uno de los sistemas de producción se cruzan unas con otras formando una envolvente convexa al origen. Esta es la frontera de precios de factores, que hemos denotado por la curva *FGHIJMA*, y en esta se satisfacen todas las proposiciones neoclásicas anteriormente mencionadas.

Gráfico 3.8
La función de producción sustituta y la frontera de precios de los factores



Capital sustituto y función de producción sustituta

¿Cuál es la interpretación del capital gelatina… que todo esto presupone? Puede decirse que es el capital sustituto (homogéneo) que da exactamente el mismo resultado que la variable colección de bienes de capital físicos diversos en nuestro modelo realista […] ¿Cómo puede computarse la cantidad de capital sustituto —gelatina— en cada situación de equilibrio estacionario, en el modelo neoclásico de Ramsey-Clark? Simplemente, calculando la pendiente de la frontera de precios de los factores en todos y cada uno de sus puntos y multiplicando por ella la cantidad de trabajo, fácilmente medible, correspondiente a cada punto. […] Hay otro modo más de calcular (o de verificar) la magnitud del capital sustituto que ha de entrar en la función de producción sustituta capaz de predecir toda conducta. En cualquier situación, habrá una tasa de interés de mercado empírica (o simulada), así como un producto total empíricamente observado y una participación de la fuerza de trabajo igualmente empírica. La participación de la propiedad, valor residual, una vez capitalizada a la tasa de interés o de ganancia observada, tiene que ser, dado que hemos postulado la ausencia de incertidumbre, exactamente igual al valor de balance de los bienes de capital heterogéneos, valuado cada uno de ellos a su precio de equilibrio de mercado, que está perfectamente determinada por la animada emulación de numerosos ofertantes y demandantes (Samuelson 1962: 201).

Los efectos Wicksell

Para mostrar las diferencias entre el efecto Wicksell real y el efecto Wicksell precio, Bhaduri (1966) parte de la relación del capital per cápita, $k = \frac{y-w}{r}$, que en general expresa como: $k = \Psi\,(y, w, r)$. Diferenciando totalmente esta función, se obtiene:

$$dk = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial w} dw + \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr \right)$$

Esta ecuación tiene dos componentes: 1) $\frac{\partial \Psi}{\partial y} dy$; y, 2) $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial w} dw + \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr \right)$. El primero es el que indica el cambio en el valor del capital per cápita provocado por la técnica de producción: «El valor del capital per cápita es más alto porque el producto–trigo per cápita es más alto». A este se le denomina efecto Wicksell real: «el cambio en el valor del capital originado por un cambio en la técnica de producción» que impacta en la productividad del marginal del capital (Bhaduri 1966: 285-286). El segundo captura los cambios en el valor del capital per cápita debido a la variación en los precios de los factores (tasas de interés y de salarios). Se le denomina a efecto Wicksell precio. Se puede demostrar que:

$$dk\ real = \frac{\partial \Psi}{\partial y} dy = \frac{dy}{r} \text{ y } dk\ precio\ = \frac{\partial \Psi}{\partial w} dw + \frac{\partial \Psi}{\partial r} dr = -\left(\frac{k}{r} dr + \frac{dw}{r} \right)$$

El primer efecto nos da la condición para la productividad marginal del capital. Si hay dos técnicas igualmente rentables, pero una tiene un capital per cápita y un producto per cápita más altos, «el incremento del valor del producto per cápita es exactamente compensado por el incremento del valor del capital per cápita para mantener constante la tasa dada de beneficio. Así nosotros tenemos una clara definición del producto marginal del capital (en términos de valor) siempre que la tasa de beneficio se mantenga constante y que técnicas diferentes sean comparadas a la misma tasa de beneficio. Pero si nosotros comparamos economías con diferentes técnicas y diferentes tasas de beneficio (y correspondientemente diferentes tasas de salario), el efecto Wicksell precio, […] entra en operación y no hay entonces razón para creer que el producto marginal del capital en términos de valor iguale la tasa de beneficio. Este punto fue destacado por Wicksell en su crítica a von Thünen. […] Cuando el capital es utilizado como factor de producción en un modelo de un solo bien (el 'capital' es un '*stock*' y el producto un 'flujo' del mismo bien), […]por definición, el efecto Wicksell precio es cero» (Bhaduri 1966: 286-287). En estas condiciones la pendiente en cualquier punto de la curva de salario–beneficio, es igual a la relación capital–trabajo, o capital per cápita, «bajo los supuestos usuales del pago de los factores de acuerdo a sus productos marginales y de una función de producción homogénea de grado uno en trabajo y 'capital'» (Bhaduri 1966: 286-287).

Podemos apreciar en el gráfico 3.8 que $k_A < k_B < k_C < k_D < k_E < k_F$. De otro lado, puesto que solo se produce un bien final (el bien de consumo), la intersección de cada línea $w - r$ con el eje vertical (es decir el intercepto) mide, como ya señalamos, el correspondiente producto por trabajador de cada uno de los sistemas que podemos ordenar como sigue: $y_A < y_B < y_C < y_D < y_E < y_F$.

Como se comprenderá, hay una relación directa entre el producto per cápita y el capital per cápita de los sistemas de producción. Por lo tanto, en el cuadrante izquierdo se puede dibujar la función de producción «sustituta», asumiendo que existen infinitas técnicas o sistemas de producción y que con este número infinito de técnicas la frontera precios de los factores, será claramente continua y convexa al origen.

El procedimiento seguido por Samuelson parece convincente y absolutamente lógico. Si se obtiene la función de producción $y \cong f(k)$ partiendo de capital heterogéneo, se puede utilizar el modelo simple de un bien, en el cual el capital y el producto son homogéneos, siendo este capital (que llama gelatina) sustituto del capital heterogéneo. Samuelson habría rehabilitado así las parábolas neoclásicas y mostrado la vacuidad teórica de las críticas a la teoría del capital y la distribución efectuadas por Robinson, Garegnani y otros.

Es importante señalar que si la curva o frontera de precios de los factores es convexa, valores bajos de k corresponderán a mayores tasas de beneficio, y viceversa. Esta relación inversa (entre k y r) es conocida como el «efecto precio Wicksell positivo». Cuando la función es cóncava, valores altos de k están asociados con altas tasas de beneficios. Este es el «efecto precio Wicksell negativo»[5].

Recuérdese que los mercados son perfectos y que los precios trasmiten con exactitud la información correcta sobre la escasez relativa de un bien o de un factor de producción. Esto corresponde a los postulados de sustitución que se supone ocurren en el consumo y la producción. La escasez relativa de factores hace que los consumidores aumenten su demanda de bienes producidos con los factores relativamente más abundantes, pues los precios de estos bienes serán relativamente más bajos; y, en la otra cara de moneda, los productores adoptarán la técnica ahorradora del factor escaso, aumentando su demanda del factor abundante pues su precio será relativamente más bajo.

Aquí es donde aparece el efecto Wicksell. Si es posible postular una demanda de factores que relaciona inversamente sus cantidades y precios —como parece haberlo

---

[5] Los cambios en el valor del capital cuando cambian los valores de w y r, pero no cambian las técnicas, son denominados «efectos precio de Wicksell». De otro lado, los cambios en el valor del capital generados por cambios en las técnicas cuando cambian los valores de w y r, son denominados «efectos reales de Wicksell».

demostrado Samuelson— entonces un aumento en la tasa de interés debe conducir a una disminución de la relación capital–trabajo. Este es el efecto precio Wicksell positivo. Wicksell, en su *Lectures on Political Economy*, señaló que este efecto se cumple solo bajo ciertas condiciones especiales. Dado el aumento de la tasa de interés puede producirse un efecto Wicksell real positivo, es decir, un aumento de la relación técnica entre maquinaria (bienes físicos) y trabajadores, pero nada asegura que el cambio en el valor del capital sea el que supone la teoría neoclásica.

Sin embargo, de acuerdo a la frontera de precios de los factores de Samuelson no hay lugar para estas anomalías: hay una relación inversa entre las cantidades demandadas de un factor y sus precios: entre el salario real y el empleo de la fuerza de trabajo, y entre la tasa de interés y la cantidad demandada de capital[6].

El error de Samuelson y la curva salario–beneficio o frontera de precios de los factores

El gran error que cometió Samuelson fue suponer uniformidad en los coeficientes de trabajo y capital requeridos en la producción de bienes en ambos sectores. En realidad, como lo señala Garegnani (1970), Samuelson no abandonó el modelo de un solo bien porque si $\beta = b = \bar{b}$ y $\alpha = a = \bar{a}$, entonces $p_c = p_k = 1$.

Podemos reformular la ecuación de salario–beneficio como sigue:

$$w = \frac{1 - a(r+\delta)}{\beta + (r+\delta)a\beta(m-1)}$$

Donde: $m = \dfrac{\alpha b}{a\beta}$

El cociente m puede ser mayor, igual o menor que uno. En el primer caso la composición orgánica del sector de bienes de consumo es mayor que la del sector de bienes de capital. Cuando ambas son iguales toma el valor de uno.

6 Los bienes de capital y la cantidad de capital que estos bienes representan son el resultado de inversiones efectuadas en el pasado. De aquí se infiere una relación inversa entre la inversión y la tasa de interés. Por lo tanto, una vez rehabilitadas las parábolas neoclásicas podría decirse también que se valida esta relación: la inversión disminuye si sube la tasa de interés. Además, de acuerdo con el debate de los dos Cambridge la unidad de medida de las inversiones debe ser la misma que la del capital.

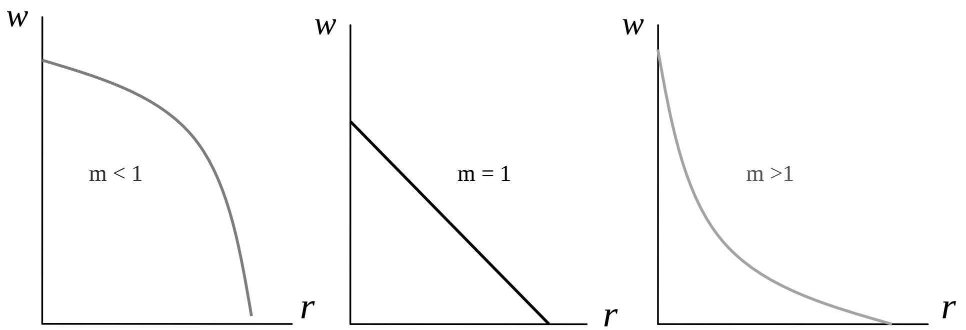
Ahora bien, si existen diferentes composiciones orgánicas, es decir, si el sistema de producción no es de un solo bien, la curva salario–beneficio puede ser convexa al origen cuando $m > 1$, o puede ser cóncava al origen cuando $m < 1$. Cuando $m = 1$, la ecuación salario–beneficio es de una recta, como la obtenida por Samuelson para cada uno de sus sistemas de producción (véase gráfico 3.9).

Cuando la curva es cóncava al origen ($m > 1$), las proposiciones neoclásicas pierden validez. Por ejemplo, la elasticidad de la «frontera de precios de los factores» ya no reproduce la distribución del ingreso, esencialmente porque en una curva salario–beneficio o lineal, $k \neq -\partial w / \partial r$. Obviamente, esta proposición es verdadera solo si nos encontramos en el estado estacionario[7].

De las ecuaciones de precios se puede despejar el precio relativo del bien de capital, $p = p_k / p_c$:

$$p = \frac{b}{\beta + (r + \delta) a \beta (m - 1)}$$

Gráfico 3.9
La curva salario–beneficio para distintas composiciones orgánicas



[7] Cuando se abandona el supuesto de hallarse en el estado estacionario y se mantiene la regla de oro, la elasticidad de la curva salario–beneficio (*w-r*) mide la distribución del ingreso, pero los problemas con las otras proposiciones o parábolas neoclásicas persisten (Nell 1970).

Esta ecuación nos dice que el precio relativo del bien de capital será positivo, $p > 0$ para cualquier valor positivo de r, comprendido entre cero y la máxima tasa de ganancia, R, (cuando w se hace cero): $0 \leq r \leq R$ (véase Garegnani 1970: 409)[8].

El precio relativo del bien de capital será constante solo si la curva de salario–beneficio es una línea recta. Esto ocurre como se sabe cuando la proporcion de capital–trabajo es la misma en ambos sectores. Solo en este caso, «cuando r varía, el cambio en la relación r/w debe afectar igualmente a los dos bienes, dejando inalterado el precio relativo del bien de capital. En general, sin embargo, la curva de salario–beneficio puede ser cóncava o convexa al origen» (Garegnani 1970: 410).

Con una curva cóncava al origen el precio relativo del bien de capital aumenta cuando aumenta la tasa de ganancia. Como ya lo mencionamos esto ocurre cuando $m < 1$, es decir, cuando la relación capital–trabajo en el sector de bienes de consumo es menor que la relación capital–trabajo en el sector de bienes de capital: la elevación de los costos de interés afecta a los bienes de capital más que a los bienes de consumo. Lo contrario ocurre cuando la relación capital–trabajo en el sector de bienes de consumo es mayor que la relación capital–trabajo en el sector de bienes de capital.

El *reswitching* y la reversibilidad del capital

Consideremos los problemas de *reswitching* y de «reversibilidad del capital». Supongamos que existen solo dos sistemas o técnicas de producción: una con una frontera de precios de los factores convexa al origen y la otra con una frontera de precios de los factores cóncava al origen (véase gráfico 3.10).

Como se sabe, según la teoría neoclásica los empresarios capitalistas maximizan beneficios (o minimizan costos), por lo tanto, para cada relación salario–beneficio escogerán la técnica que les permita obtener el máximo producto total, o en otras palabras, dada la tasa de ganancia, el empresario capitalista optará por la técnica más eficiente: que le permite producir con el menor costo, pagando el salario real más elevado[9].

8 Los precios de las mercancías son positivos y finitos para todo valor r que se encuentre solo en el intervalo $0 \leq r \leq R$, donde R es la máxima tasa de beneficio cuando $w = 0$. Si se asumen precios positivos aun más allá de la máxima tasa de beneficio, se producirán valores negativos para la tasa de salario. Según Laibman y Nell (1977) y Garegnani (1976), en cualquier sistema para el intervalo $0 \leq r \leq R$, todos los precios y los salarios son positivos. Esto está garantizado por el teorema Perron-Frobenius, según el cual el máximo valor propio de una matriz no singular tiene un vector propio de componentes positivos.

9 Según Nell (1983) la teoría neoclásica no toma en cuenta que las firmas capitalistas, como unidad de capital, compiten no solo en los mercados de bienes y de trabajo, sino también en el mercado de capitales, pues generalmente deben endeudarse para realizar grandes inversiones en capital fijo. En este contexto competitivo, las firmas deben considerar sus tasas de beneficio. El cambio en las técnicas es resultado de la presión generada por la competencia.

La técnica I es la más rentable en más de una tasa de beneficio; es eficiente a tasas de beneficios por debajo de r_1 y por encima de r_2 (hasta la máxima tasa de beneficios, R^I). Por su parte, la técnica II es eficiente a tasas de beneficio que se encuentran entre r_1 y r_2. Este es precisamente un problema de *reswitching* o de «readopción de técnicas». Este problema se presenta precisamente porque la envolvente de las distintas curvas salario–beneficio asociada a cada técnica, es decir, la frontera de precios de los factores no es toda convexa al origen, por lo tanto, no satisface las parábolas neoclásicas. Únicamente sobre los puntos de esta frontera (la envolvente de las dos curvas de salario–beneficio que corresponden a las dos técnicas) los empresarios capitalistas maximizan beneficios. Sabemos, además, que solo una curva de salario–beneficio convexa al origen asegura la existencia de una función de producción bien ordenada.

Las ecuaciones del producto per cápita de las dos técnicas en el «estado estacionario» pueden representarse con las siguientes ecuaciones:

(1) $y_1 = rk_1 + w$ Técnica I

(2) $y_2 = rk_2 + w$ Técnica II

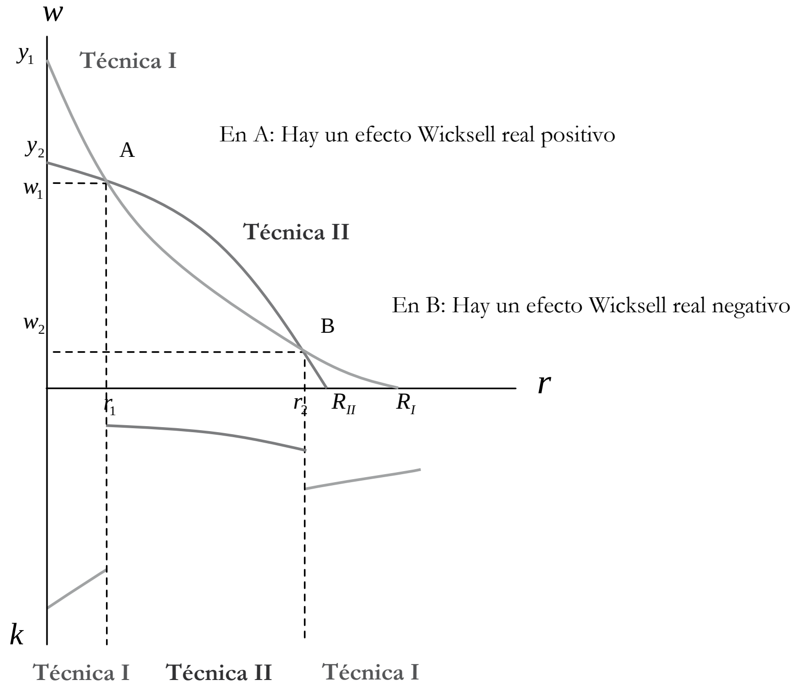
Entonces, las ecuaciones de las respectivas relaciones capital–trabajo, en el estado estacionario, serán:

(1a) $k_1 = (y_1 - w) / r$

(2a) $k_2 = (y_2 - w) / r$

En los puntos *A* y *B* del gráfico 3.10 (puntos de cambio de técnicas) las tasas de salarios (w) y de beneficios (r) son las mismas en las ecuaciones (1a) y (2a). Claramente entonces, $k_1 > k_2$ ya que y_1 y y_2 son constantes y $y_1 > y_2$. Esto significa que la técnica I presenta un valor mayor de capital en ambos puntos de cambio de técnicas (en r_1 y r_2, con $r_1 < r_2$). La misma técnica I de producción del único bien de consumo es más rentable para valores muy bajos y muy altos de la tasa de beneficios. Cuando las tasas de beneficio superan a r_1, la economía abandona la técnica I y adopta la técnica II. Cuando las tasas de beneficio superan a r_2, la economía vuelve a adoptar la técnica I que fue descartada por ser poco rentable para tasas de beneficio intermedias o que se encuentran entre r_1 y r_2. Este es el llamado fenómeno de *reswitching* o *double-switching* de técnicas, con lo cual se pone en duda la validez de las parábolas neoclásicas.

Gráfico 3.10
***Reswitching* y reversibilidad del capital**



El *reswitching* ocurre cuando una sola técnica es la más rentable tanto a tasas de beneficio altas como bajas. El punto de cambio perverso para la teoría neoclásica es *B*, porque el cambio en la tasa de beneficio r_2, desde la técnica II a la técnica I, es un cambio desde un nivel menor a uno mayor de capital por trabajador a medida que la tasa de beneficio se incrementa. Este es un *backward switch* o efecto real negativo Wicksell. Este cambio de técnicas invalida la relación inversa neoclásica entre k y r.

Por otro lado, sabemos que el problema de la *reversibilidad del capital* ocurre cuando el valor del capital se mueve en la misma dirección que la tasa de beneficio en las proximidades de un punto de cambio. En efecto, existe *capital reversing* en *B*, porque $y_2 < y_1$ y $k_2 < k_1$ y a menores valores de r, k_2 continuará disminuyendo.

4. El enfoque de Solow y la crítica de Nell

Robert Solow también participa en la controversia e intenta evitar el problema en la medición del capital utilizando el análisis de la tasa de retorno de la inversión de Fisher (1930). Sin embargo, Edward Nell critica el enfoque de Solow, pues comete el mismo error de Samuelson, es decir, su análisis solo se aplica en un contexto de un solo bien y no consigue mostrar que la tasa de interés es la medida de la tasa social de retorno sobre los ahorros invertidos.

El intento de Solow de evitar el problema de la medición del capital utilizando un marco intertemporal

El otro intento de evitar el problema de la medición del capital y del uso de la función de producción fue efectuado por Solow en su libro *Capital Theory and the Rate of Retur*n publicado en 1963 y en su artículo «The interest rate and transition between techniques» de 1967. Lo hace recurriendo al análisis de la tasa de retorno de la inversión desarrollado por Fisher (1930). Este autor plantea que las decisiones de inversión de una empresa son un problema intertemporal; desarrolla su teoría suponiendo que todo el capital es circulante. Si todo el capital se gasta en un proceso de producción, entonces no existe, como se comprenderá, un *stock* de capital K. Para Fisher el capital es inversión. Solow (1967) retoma este planteamiento fisheriano de ausencia del factor capital y de una teoría de la inversión que prescinde del uso de la función de producción neoclásica y del concepto de productividad marginal de los factores capital y trabajo. Como Fisher, Solow (1967) se concentra solo en el análisis del retorno de la inversión.

Solow inicia su argumentación afirmando que en las discusiones sobre los problemas en la teoría del capital —los fenómenos de *reswitching* y *capital reversing*, el efecto precio negativo de Wicksell, etcétera—, la tasa de interés (o la tasa de beneficio) fue considerada como un parámetro. Se partía de sus cambios exógenos para explicar situaciones alternativas de equilibrio. Dice que «es consecuencia de este enfoque que se haya descuidado una importante propiedad de la tasa de interés: […] en la medida en que prevalezcan el pleno empleo y la fijación de los precios mediante la competencia, la tasa de interés constituye una medida precisa de la tasa social de retorno sobre los ahorros» (Solow 1967: 30).

Según Solow (1967) la tasa de retorno social al ahorro (ρ) es una medida adecuada para analizar la transición de una técnica a otra, es decir, el cambio en los métodos de producción a expensas del consumo presente. La tasa de interés o de ganancia obtenida en la producción de bienes de consumo y en sus insumos *(inputs)* mediría la relación de los beneficios del consumo futuro entre el sacrificio del consumo presente. Esto implicaría entonces que las tasas de retorno privada y social coincidirán. Con este enfoque intertemporal se intenta evitar los problemas de la teoría neoclásica del capital: la tasa de interés (r) es «una medida precisa de la tasa social de retorno sobre los ahorros» (ρ) en cualquier situación, es decir, tanto en situaciones de *reswitching* como en los casos normales, es decir, r es igual a ρ. Solow (1967) pretende así extender la teoría neoclásica de asignación de recursos y precios a la explicación de los beneficios y, por consiguiente, a la distribución del ingreso. La distribución constituiría un caso especial de la eficiencia en el establecimiento de los precios.

Para mostrar esta proposición Solow supone una economía que produce n bienes o mercancías con un insumo primario (trabajo) no producible. La tecnología y este insumo trabajo permiten producir mayores cantidades de los n bienes. Como no hay producción conjunta, hay n industrias, una para cada mercancía. Hay una *tecnología de capital circulante*. «Cada industria conoce un número finito de actividades; una actividad de la industria *iésima* [...], produce una unidad de la mercancía *iésima*, consume *stock*s determinados de cada una de las n mercancías que deben serle suministradas de antemano, y requiere un insumo determinado de trabajo» (Solow 1967: 30-31). Cada actividad presenta retornos constantes a escala y actividades diferentes se combinan aditivamente. Los salarios se pagan *post-factum*.

El modelo de la economía de Solow en forma matricial y algunas críticas

Existen dos técnicas conocidas:

$[A, a_0]'$ Técnica α (técnica en operación)

$[B, b_0]'$ Técnica β (técnica que será elegida)

Donde A y B son las respectivas matrices de coeficientes de insumos interindustriales de orden n , y a_0 y b_0 son los correspondientes vectores fila de requerimientos directos de trabajo.

Existe una tasa de interés, r^*, (*switching interest rate*) que constituye un punto de cambio (*switching point*) para las técnicas α y β, y un salario real asociado, w. La tasa de retorno (ρ) relacionada con la transición de la técnica α a la técnica β, será igual a la tasa de interés de cambio (r^*), es decir, $\rho = r^*$. Esto es lo que Solow intenta demostrar.

El vector fila de precios de las **n** *mercancías:*

$$(1) \quad p^* = p^* A(1+r^*) + a_0 w = p^* B(1+r^*) + b_0 w$$

($r^* = w$) son la tasa de interés y la tasa de salario a los que se igualan las dos técnicas, y p^* es el vector fila de precios asociado que las dos técnicas tienen en común. A la tasa de interés r^*, las técnicas α y β son competitivas y pueden coexistir porque a esa tasa de interés, ambas técnicas presentan el mismo precio.

El vector columna del consumo:

En el modelo de Solow la demanda final solo contiene bienes de consumo. No hay inversión; por lo tanto, la tasa de crecimiento (g) es igual a cero. En otras palabras, Solow trabaja en un contexto de estado estacionario (equilibrio competitivo y estable)[10].

(2) $(I - A)\,X = C$

(3) $(I - B)\,Y = C^*$

X y Y son vectores columna de las n cantidades físicas de producto para las técnicas α y β, respectivamente. C y C^* son vectores columna de las n cantidades físicas que conforman la demanda final de consumo para las técnicas α y β, respectivamente. Los respectivos capitales circulantes son: AX y BY. Estos son necesarios para repetir el ciclo de producción en el período siguiente.

La economía parte de un estado estacionario en el cual utiliza la técnica α y disfruta de cierto nivel de consumo C. Solow supone que esta economía intenta, para el período siguiente, «entrar en un nuevo estado de equilibrio estable, que incluya el empleo de la técnica β, el producto Y y el C^*» (Solow 1967: 32). Para que esto sea posible, la economía debe generar capital circulante (BY) disminuyendo el producto actual (X). Con este objetivo, la economía debe reducir el nivel actual de consumo, para pasar de un nivel C a otro de nivel mayor C^* correspondiente con la técnica β. Si el consumo presente se reduce a un nivel $\bar{C}$, la magnitud del sacrificio del consumo presente será igual a: $C - \bar{C}$.

De la ecuación (2) y debido a que el producto actual sería igual a: $X = \bar{C} + BY$

(4) $C - \bar{C} = BY - AX$

Esta ecuación indica que el sacrificio del consumo presente es equivalente al incremento del capital circulante para hacer posible la operación de la técnica β.

Por otro lado, la ganancia en bienes de consumo futuro serán iguales a $C^* - C$. Así, de las ecuaciones (2) y (3):

(5) $C^* - C = (I - B)Y - (I - A)X$

En este punto, es importante mencionar una de las críticas que hace Nell al modelo de Solow. Las ecuaciones (4) y (5) solo tienen sentido bajo el supuesto de que el conjunto de mercancías cuyo consumo se sacrifica, deben ser físicamente idénticas al conjunto de mercancías sumadas al *stock* de medios de producción. Como señala en Nell (1976), el análisis de Solow implícitamente asume que todos los bienes figuran tanto como bienes de consumo y como medios de producción. Si asumimos que el

[10] En la sección 7 de su artículo, Solow introduce la tasa de crecimiento g, pero no altera el vector de demanda final.

bien de consumo y los bienes producidos como insumo no son homogéneos, la transición hacia la técnica β «puede implicar cambios no solo en la cantidad de insumos utilizados, sino también en el tipo de insumos» (Eatwell 1976). En consecuencia, la equivalencia física entre los bienes de consumo sacrificados y el incremento en el *stock* de capital desaparecerá, a menos que el modelo sea solo de un bien.

Ahora bien, para hallar la tasa de retorno social, dado que no es posible comparar $C-\bar{C}$ con $C^{*}-C$ si no están expresados en valores homogéneos, Solow utiliza el sistema de precios común a las dos técnicas en el «punto de cambio» (Solow 1970 y 1967). Nótese sin embargo, que, como se aprecia en la ecuación (1), «estos precios presuponen precisamente la tasa de beneficio que Solow desea explicar» (Pasinetti 1970).

La expresión final de la tasa social de retorno sobre los ahorros, definida por Solow, es:

$$(6)\quad \rho = \frac{p^{*}(C^{*}-C)}{p^{*}(C-\bar{C})}$$

De las ecuaciones (4) y (5), pre-multiplicando por el vector fila de precios, tenemos:

$$(7)\quad p^{*}(C^{*}-C) = p^{*}(I-B)Y - p^{*}(I-A)X$$

$$(8)\quad p^{*}(C-\bar{C}) = p^{*}BY - p^{*}AX$$

Reemplazando las ecuaciones (7) y (8) en (6), se obtiene la tasa social de retorno sobre los ahorros a partir de la definición hecha por Solow[11]:

$$(9)\quad \rho = \frac{p^{*}(I-B)Y - p^{*}(I-A)X}{p^{*}BY - p^{*}AX}$$

Post-multiplicando la ecuación de precios (1) por X y Y adecuadamente, y haciendo algunas operaciones algebraicas, tenemos:

$$(10)\quad p^{*}(I-A)X = r^{*}p^{*}AX - a_0 w^{*}X$$

$$(11)\quad p^{*}(I-B)Y = r^{*}p^{*}BY - b_0 w^{*}Y$$

Solow asume que la fuerza laboral es constante e igual a L, por lo tanto: $a_0X = b_0Y = L$. Entonces, de las ecuaciones (10) y (11), se obtiene:

$$(12)\quad p^{*}(I-B)Y - p^{*}(I-A)X = r^{*}p^{*}BY - r^{*}p^{*}AX$$

---

[11] Esta tasa puede expresarse también como sigue: $\rho = \dfrac{p^{*}Y - p^{*}X}{p^{*}BY - p^{*}AX} - 1$, que es la relación entre el incremento de la producción, neta de insumos, y el ahorro convertido en inversión en capital circulante, es decir, el incremento del capital circulante al pasar de la técnica α a la técnica β. Como en Fisher (1930) la inversión de cualquier período genera producción solo en el siguiente período.

La tasa de interés es la medida precisa de la tasa social de retorno

Robert Solow señala:
Esta es la proposición básica que me propuse probar. La tasa de interés a la cual tanto α como β pueden competir es igual a la tasa social de rendimiento del ahorro en el pasaje de un estado de equilibrio con la técnica α, a un estado de equilibrio con la técnica β. Si α resulta competitiva para tasas de interés r_α, levemente mayores que r^*, y β resulta competitiva para tasas de interés r_β levemente inferiores, entonces, en general: $r_\alpha \geq \rho \geq r_\beta$, que es lo que más cabe esperar en el caso de una tecnología discreta. A medida que aumenta el número de técnicas, y se contraen los intervalos entre ellas, cada tasa de interés pasa a ser un punto de cambio, y esta pequeña indeterminación desaparece en el límite (Solow 1967: 33).

Reemplazando esta expresión en la ecuación (9), se obtiene:

$$(13)\quad \rho = \frac{r^* p^* BY - r^* p^* AX}{p^* BY - p^* AX} = \frac{r^* p^* (BY - AX)}{p^* (BY - AX)}$$

$$(14)\quad \rho = r^*$$

Este resultado es lógicamente debido a que $p^*(BY - AX)$ es un escalar. Hemos llegado a lo que Solow (1967) quería demostrar y, supuestamente, con ello mostrar la poca o nula importancia de los problemas de la medición del capital y del uso de la función de producción.

El error de Solow y la crítica de Edward J. Nell

Este resultado no explica cómo se determina la tasa de interés o la tasa de beneficio. Si los precios dependen de la tasa de interés, para utilizar p^*, es decir, para que los precios existan y sean utilizados, previamente se debe conocer el correspondiente valor de r^*. Por lo tanto, Solow falló en su intento de demostrar que la tasa de interés es una medida precisa de la tasa social de retorno sobre los ahorros. Al igual que Samuelson, cuando intentó construir su función de producción *sustituta*, Solow no pudo dejar el contexto de un solo bien y, por lo tanto, no pudo rehabilitar la proposición neoclásica acerca de la relación inversa entre la tasa de beneficio y el valor de los bienes de capital, o de la relación inversa entre la inversión y la tasa de interés. De este modo, fracasó en su propósito de extender la teoría de asignación de recursos y precios a la explicación de la tasa de beneficio.

El teorema de Solow puede ser analizado con mayor claridad partiendo de las identidades de valor agregado del ingreso nacional y producto neto, en términos per cápita, correspondiente a las dos técnicas (Nell 1976)[12]. Utilizando capital circulante y operando en condiciones de estado estacionario (g = 0), tenemos:

(1) $y_1 = w + (1+r)k_1 = c_1 + k_1$ Técnica 1

(2) $y_2 = w + (1+r)k_2 = c_2 + k_2$ Técnica 2

Donde y es el ingreso o producto per cápita, w la tasa de salarios, r la tasa de beneficio, c el consumo per cápita y k el capital per cápita.

Ahora supongamos un cambio desde la técnica 1 hasta la técnica 2. Por lo tanto, para obtener k_2, el consumo c_1 debe ser reducido. Consecuentemente, la ecuación de transición será:

(3) $y_1 = \overline{c} + k_2$

Según Solow, la tasa de retorno social está definida como:

(4) $\rho = \dfrac{c_2 - c_1}{c_1 - \overline{c}}$

De las tres primeras ecuaciones, se obtiene:

(5) $c_2 - c_1 = (y_2 - y_1) - (k_2 - k_1)$

(6) $c_1 - \overline{c} = k_2 - k_1$

(7) $y_2 - y_1 = (1+r)(k_2 - k_1)$

Por lo tanto:

(8) $\rho = \dfrac{y_2 - y_1}{k_2 - k_1} - 1 = \dfrac{(1+r)(k_2 - k_1)}{k_2 - k_1} - 1 = r$

(9) $\rho = r$

Pero, sabemos que en el estado estacionario el producto per cápita correspondiente a cualquier técnica es constante, entonces, a cualquier punto de cambio en un modelo de capital circulante, $k_2 = \dfrac{y_2 - w}{1+r}$ y $k_1 = \dfrac{y_1 - w}{1+r}$.

[12] Con el fin de cambiar o pasar de la técnica 1 a la técnica 2, w y r serán comunes a ambas y también los precios. Los productos están valuados con estos precios comunes.

En consecuencia,

$$(10)\quad r = \frac{y_2 - y_1}{k_2 - k_1} - 1$$

Esto no guarda ninguna relación con ninguna definición de la tasa de retorno social. Además, como señala Nell, esta expresión es una tautología y no puede explicar precios o beneficios: los precios y la tasa de beneficio deben ser conocidos antes de hallar y y k[13]. Únicamente en un modelo de un solo bien, los precios y beneficios no son necesarios. Por consiguiente, nada puede explicarse partiendo de una tautología.

Solow quería proporcionarnos una teoría de la tasa de interés en reemplazo de la teoría del «capital», en términos de tasa de rendimiento sobre el sacrificio. Para el cálculo de esta tasa de rendimiento no requería supuestamente de ninguna medición del capital. Pero Solow se equivocó al pensar que una economía de producción de mercancías heterogéneas mediante mano de obra y bienes de capital heterogéneos funciona como en el caso especial de una economía que produce un solo bien con infinitas técnicas. Si fuera así, las parábolas neoclásicas se habrían rehabilitado: la cantidad de capital y la tasa de beneficios se relacionarían inversamente, se podría usar la función de producción y se restauraría la idea de que la productividad marginal del capital se iguala a la tasa de beneficios o tasa de interés.

Pero, ¿hay algo rescatable o importante en su teoría de la tasa social de retorno sobre los ahorros? Según Nell, aunque Solow parte del punto de cambio (*switch point*) para igualar r y ρ, solo su definición de ρ está justificada. Esta tasa social de retorno es definida en términos no solo de las ecuaciones (1) y (2) correspondientes a las dos técnicas, sino también en términos de la ecuación de transición, ecuación (3). Como sostiene Nell (1976), Solow «está preocupado, no solo con el hecho de que el punto de cambio exista, sino también con el sacrificio en el consumo y la ganancia subsecuente que involucra realizar el cambio de técnica». Entonces, la proposición de Solow «no es tanto una condición de equilibrio, como una validación de una condición de equilibrio propuesta». La estimación de ρ en términos de ganancia social de consumo futuro resultante del sacrificio de consumo presente, y la tasa de beneficio (r) obtenida con la producción de bienes de consumo y sus insumos, deben ser mutuamente compatibles. En otras palabras, las transformaciones intertemporales de consumo deben ocurrir a una tasa (ρ) capaz de ser igualada con la tasa de beneficio (r) obtenida en la producción de los bienes de consumo y de sus insumos. Para entender el argumento —dice Nell—, supongamos lo contrario: supongamos que sistemáticamente $\rho \neq r$, entonces «el ahorro y la inversión no se equilibrarán con los niveles actuales de capital» y, por

[13] Véase nota de pie anterior.

lo tanto, «la teoría neoclásica del capital no podría poseer un equilibrio completo. [...] Si la tasa de retorno se halla por encima de la tasa de beneficio, los empresarios tratarían de desechar sus equipos y realizar nuevas inversiones, mientras que si la tasa de retorno está por debajo de la tasa de beneficio, los nuevos ahorros serían canalizados a la licitación de las propiedades existentes en la actualidad. […] Por lo tanto, la proposición de Solow debería interpretarse como una demostración de que la teoría de Fisher del ahorro e inversión puede ser insertada en el modelo de salario–beneficio. No es una condición de equilibrio en sí misma, más bien demuestra la posibilidad de un equilibrio fisheriano» (Nell 1976: 103). Este sería el aporte de la teoría de Solow sobre la tasa social de retorno sobre los ahorros.

Sin embargo, la teoría de Solow fue desarrollada para condiciones estacionarias, es decir, para una economía donde la inversión neta es cero porque la tasa de crecimiento (g) es igual a cero. Esta es la debilidad de la argumentación teórica de Solow. Dada una tasa de crecimiento positiva y suponiendo que la transición de una técnica a otra ocurre sin alterar la tasa de crecimiento, tenemos:

(11) $y_1 = w + (1+r)k_1 = c_1 + (1+g)k_1$ Técnica 1

(12) $y_2 = w + (1+r)k_2 = c_2 + (1+g)k_2$ Técnica 2

(13) $y_1 = \bar{c} + (1+g)k_2$ Ecuación de transición

De estas tres ecuaciones se obtiene:

(14) $c_2 - c_1 = y_2 - y_1 - (1+g)(k_2 - k_1)$

(15) $c_1 - \bar{c} = (1+g)(k_2 - k_1)$

(16) $y_2 - y_1 = (1+r)(k_2 - k_1)$

Considerando la definición de la tasa de retorno social y haciendo reemplazos, obtenemos:

(17) $\rho = \dfrac{c_2 - c_1}{c_1 - \bar{c}} = \dfrac{y_2 - y_1}{(1+g)(k_2 - k_1)} - 1$

(18) $\rho = \dfrac{(1+r)(k_2 - k_1)}{(1+g)(k_2 - k_1)} - 1 = \dfrac{1+r}{1+g} - 1$

(19) $\rho = \dfrac{r-g}{1+g}$

La tasa social de retorno se iguala a la tasa de interés, $\rho = r$, solo cuando la tasa de crecimiento es igual a cero, $g = 0$. Cuando la tasa de crecimiento es igual a la tasa de interés, $g = r$, es decir, cuando se cumple la regla de oro, la tasa social de retorno es igual a cero ($\rho = 0$). Cuando la tasa de crecimiento es mayor que la tasa de interés, $g > r$, entonces la tasa social de retorno es negativa, $\rho < 0$.

Nell examinó la teoría de Solow en otra situación general, es decir, cuando la transición de técnicas altera la tasa de crecimiento: existen dos tasas de crecimiento, una inicial, g_1, que corresponde a la técnica 1 y otra posterior, g_2, que corresponde a la técnica 2.

(20) $y_1 = w + (1+r)k_1 = c_1 + (1+g_1)k_1$ Técnica 1

(21) $y_2 = w + (1+r)k_2 = c_2 + (1+g_2)k_2$ Técnica 2

(22) $y_1 = \overline{c} + (1+g_2)k_2$ Ecuación de transición

Operando las tres ecuaciones, se obtiene:

(23) $\rho = \dfrac{c_2 - c_1}{c_1 - \overline{c}} = \dfrac{r(k_2 - k_1) - (g_2 k_2 - g_1 k_1)}{(k_2 - k_1) + (g_2 k_2 - g_1 k_1)}$

Solo si las tasas de crecimiento son iguales a cero ($g_1 = g_2 = 0$), entonces la tasa social de retorno será igual a la tasa de interés ($\rho = r$). Si las tasas de crecimiento son iguales, ambas, a la tasa de interés, es decir, si se cumple la regla de oro ($g_1 = g_2 = r$), entonces la tasa social de retorno es igual a cero ($\rho = 0$). Si ambas tasas de crecimiento son distintas de cero, pero no son iguales ($g_1 \neq g_2$), el teorema de Solow se mantendrá si y solo si $g_1 k_1 = g_2 k_2$.

En resumen, la teoría de Solow se cumple cuando $g = 0$. Si la transición ocurre con alteraciones en la tasa de crecimiento y hay dos tasas diferentes, la teoría de que «la tasa de interés constituye una medida precisa de la tasa social de retorno sobre los ahorros», se cumple si, y solo si, $g_1 / g_2 = k_2 / k_1$.

Finalmente, Nell se pregunta: ¿cuál es la relación entre el ahorro y ρ? Recordemos que ρ es la tasa de retorno social al ahorro. Suponiendo que $g = s_P r$, donde s_P es la propensión de los beneficios destinada al ahorro y $0 < s_P < 1$. Entonces,

$$\rho = \frac{r-g}{1+g} = \frac{r - s_p r}{1 + s_p r} = \frac{r(1-s_p)}{1+s_p r}$$

Si la propensión a ahorrar y la tasa de crecimiento son iguales a cero, ($s_P = 0$ y $g = 0$), entonces *¡la tasa de interés constituye una medida precisa de la tasa social de retorno sobre los ahorros!*, es decir, $\rho = r$. Si $s_P = 1$ y $g = r$ (regla de oro), entonces $\rho = 0$. Cuando $0 < s_P < 1$, la tasa de interés ya no es igual a la tasa social de retorno sobre los ahorros.

Supongamos que las dos técnicas tienen dos puntos de cambio (*switch points*). Si $0 < g < r$ y $s_P < 1$ tal que $r = r_{S2}$ y $g = g_{S1} = s_P r_{S2}$, entonces, $k_2 = (c_{S1} - w_{S2}) / (r_{S2} - g_{S1}) = k_1$, y, por lo tanto, $y_2 = y_1$ y $c_2 = c_1 = \bar{c}$. Consecuentemente, ρ, expresada como $(c_2 - c_1)/(c_1 - \bar{c})$, será una tasa indefinida.

Por otro lado, si la tasa de crecimiento es igual a r_{S2}, sabemos que $c_2 = c_1 = w$, entonces $c_2 - c_1 = 0$ y, por lo tanto, $\rho = 0$.

Hemos señalado que la debilidad del modelo de Solow se encuentra en su supuesto de estado estacionario, y hemos analizado lo que sucede con la relación entre ρ y r cuando se introduce la tasa de crecimiento en el modelo. Debemos mencionar, sin embargo, que Solow introduce una tasa de crecimiento igual a la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo (*m*) en la sección 7 de su artículo. «No es necesario —dice— limitar este análisis a los estados estacionarios. Todo el razonamiento es válido si la fuerza de trabajo aumenta geométricamente a la tasa *m* por período, y todas las comparaciones se establecen entre estados de equilibrio que crecen a esa misma tasa natural» (Solow 1967: 36).

Pero cuando introduce la tasa de crecimiento natural, Solow (1967) cambia su definición de ρ para obtener la igualdad entre ρ y r:

> En una economía en crecimiento la transición de un solo período equivale a un sacrificio de $C - \bar{C}$ en el consumo en el actual período, a cambio de una ganancia en la corriente de consumo igual a $(1 + m)(C^* - C)$ en el período siguiente, de $(1 + m)^2(C^* - C)$ en el período posterior, y así sucesivamente. La tasa social de retorno es la tasa de descuento (R) que descuenta el valor de esta corriente hasta el valor de la corriente de consumo a que se renuncia» (Solow 1967: 37).

Volviendo a nuestra notación matricial y recordando que $g = m$ y $\rho = R$, lo que Solow dice puede expresarse como sigue:

$$p^*(C - \bar{C}) = \frac{(1+g)p^*(C^* - C)}{(1+\rho)} + \frac{(1+g)^2 p^*(C^* - C)}{(1+\rho)^2} + \frac{(1+g)^3 p^*(C^* - C)}{(1+\rho)^3} + \ldots$$

$$p^*(C - \bar{C}) = \frac{(1+g)p^*(C^* - C)}{(1+\rho)} \left[1 + \frac{1+g}{1+\rho} + \left(\frac{1+g}{1+\rho} \right)^2 + \ldots \right]$$

Suponiendo que $\frac{1+g}{1+\rho}<1$

$$p^*(C-\bar{C})=\frac{(1+g)p^*(C^*-C)}{(1+\rho)}\left[\frac{1+\rho}{(1+\rho)-(1+g)}\right]$$

$$p^*(C-\bar{C})=\frac{(1+g)p^*(C^*-C)}{(1+\rho)-(1+g)}$$

$$(1+\rho)-(1+g)=\frac{(1+g)p^*(C^*-C)}{p^*(C-\bar{C})}$$

$$\rho=g+(1+g)\frac{p^*(C^*-C)}{p^*(C-\bar{C})}$$

Esta última ecuación indica que $\rho = r^*$ únicamente si $\frac{p^*(C^*-C)}{p^*(C-\bar{C})}=\frac{r^*-g}{1+g}$.

Esta condición fue asumida por Solow porque deseaba mostrar que $\rho = r^*$; pero, al hacerlo, tuvo que cambiar su primera definición de la tasa social de retorno sobre los ahorros: $\rho=\frac{p^*(C^*-C)}{p^*(C-\bar{C})}$.

Finalmente, una vez que aceptamos este cambio de definición, es importante señalar que la igualdad $\rho = r^*$, es decir, que «la tasa de interés constituye una medida precisa de la tasa social de retorno sobre los ahorros», resulta de suponer que $\frac{1+g}{1+\rho}<1$ o, en otras palabras, de suponer que $\rho > g$, lo que implica que $r^* - g > 0$ y que, por lo tanto, ya no se cumple la regla de oro.

5. Lo que enseña la controversia entre los dos Cambridge

La controversia muestra la existencia teóricamente irrefutable de los fenómenos del *capital-reversing* y el *reswitching*. Con esto las parábolas neoclásicas quedan invalidadas. Samuelson, en su artículo titulado «A Summing Up», publicado en 1966, fue explícito al reconocer que no puede ser universalmente válida la proposición neoclásica según la cual, a medida que baja la tasa de interés «como consecuencia de la abstención del consumo presente a favor del consumo futuro, la tecnología debe volverse en algún sentido más *indirecta*, más *mecanizada* y más *productiva*» (Samuelson 1966: 568) [14].

Por otro lado, las críticas de Nell a la ruta seguida por Solow son elocuentes; habría que agregar que los beneficios futuros que se anticipan de un sacrificio del consumo presente o, de acuerdo con Robinson, de una decisión de inversión, depende de las expectativas de los precios y salarios. Pero, no es solo un problema de ausencia de expectativas. En la teoría fisheriana de Solow, según la cual la acumulación de capital proviene del sacrificio del consumo corriente a cambio de un mayor consumo futuro, la tasa de interés «constituye una medida precisa» de la tasa social de retorno sobre los ahorros. Esto quiere decir que mayores acumulaciones de capital se asociarían con tasas de interés más bajas, pero la controversia muestra que tasas de interés más bajas pueden provocar precisamente lo contrario[15].

Como reconoce el propio Samuelson (1966), luego de analizar la teoría fisheriana de Solow en la sección VII de su artículo:

> En resumen, en esta sección se ha mostrado que el paso a una tasa de interés más baja puede involucrar una desacumulación de capital, y un excedente (más bien que un sacrificio) de consumo corriente que se equilibra con una subsecuente reducción perpetua (más que un incremento) del consumo como resultado de la reducción de la tasa de interés. Este comportamiento anómalo, que puede presentarse aún en los modelos que no admitan el fenómeno de *reswitching*, podría llamarse *reverse capital deepening.* (Samuelson 1966: 581-582)

[14] Los neoclásicos han admitido que sus modelos de maximización de beneficios y determinación de precios de los factores por su productividad marginal pueden generar: a) *Reswitching* (una técnica que es óptima a una tasa elevada de interés y que es luego abandonada, vuelve a ser óptima a una tasa baja de interés); y b) *capital reversal* o «efecto Wicksell real» (una tasa baja de interés es asociada con una técnica que es menos mecanizada —*K/L* es baja—, aún sin la existencia de *reswitching*.

[15] Según la teoría neoclásica, cuando cambia, por ejemplo, la cantidad de trabajo, cambia en sentido contrario el salario real; en este caso el capital cambia de forma pero su valor permanece constante: la sustitución de factores garantiza el pleno empleo. Pero, como resultado de la controversia, al invalidarse la relación inversa entre las cantidades de capital y la tasa de interés, se invalidan también el uso de las funciones de demanda de trabajo y de capital. La función de demanda de trabajo puede tomar formas distintas a la señalada por la teoría neoclásica: puede tener, simultáneamente, pendientes positiva y negativa (véase Garegnani 1970 y 1990).

Samuelson admite su derrota

Samuelson señala:

El fenómeno de la reversión a una tasa de interés muy baja a un conjunto de técnicas que habían parecido viables solo a una tasa de interés muy alta implica más que tecnicismos esotéricos. Ello muestra que el cuento sencillo de Jevons, Böhm Bawerk, Wicksell y otros autores neoclásicos —según el cual a medida que baja la tasa de interés como consecuencia de la abstención del consumo presente a favor del consumo futuro, la tecnología debe volverse en algún sentido más *indirecta*, más *mecanizada* y más *productiva*— no puede ser universalmente válida (Samuelson 1966: 568).

No hay manera inequívoca de caracterizar diferentes procesos como más *intensivos en capital*, más *mecanizados*, más *indirectos*, excepto en el sentido tautológico *ex post* de haber sido adoptados a una tasa de interés baja e involucrando un salario real alto. Este tipo de tautología ha mostrado, en el caso del *reswitching*, que lleva a una clasificación inconsistente entre pares de tecnologías constantes, dependiendo de cuál tasa de interés prevalecerá en el mercado. Si todo esto causa dolores de cabeza a quienes suspiran por las viejas parábolas de la teoría neoclásica, deberemos recordarles que los académicos no han nacido para llevar una existencia fácil. Debemos respetar y valorar los hechos de la vida (Samuelson 1966: 582-583).

La controversia ha invalidado entonces la proposición neoclásica de que las remuneraciones de los factores de producción capital y trabajo se explican por sus respectivas productividades marginales. Con ello se derrumba la explicación de la distribución mediante la oferta y la demanda, la teoría de que los precios son indicadores de *escasez* y la concepción neoclásica de la producción. De acuerdo con esta teoría la distribución es un caso particular de la determinación simultánea de precios y cantidades. No se pueden determinar los precios si no se conocen las cantidades o la dotación de los factores (*endowments*). La controversia ha mostrado que no se pueden determinar los precios simultáneamente con la distribución. Hay una diferencia importante con la teoría clásica que la controversia ha puesto de relieve. Mientras en esta teoría se determina los precios relativos sin presuponer pleno empleo, tomando como datos las cantidades de cada bien, la distribución y la tecnología; en la teoría neoclásica se determinan conjuntamente precios y cantidades, tomando como datos la dotación de factores, los gustos y preferencias de los consumidores y la tecnología. Los precios de la teoría neoclásica aseguran el pleno empleo de los recursos[16].

[16] La crítica a los modelos agregados neoclásicos ha inducido a desechar la noción de capital agregado y a concentrarse en el desarrollo de modelos de equilibrio general intertemporales desagregados tomando como dato la composición física del capital y donde ya no es necesario que se igualen las tasas de ganancia.

¿Qué consecuencias tiene la controversia para la teoría del crecimiento económico? La teoría neoclásica del crecimiento es también, como sabemos, una teoría de valor y de la distribución. El efecto directo entonces es en el uso de la función de producción agregada. Solow, el autor del modelo neoclásico de crecimiento, dice:

> Permítanme referirme a la importancia (o falta de importancia) del *reswitching*, y formular la pregunta que a menudo parece estar en segundo plano, pero que raramente se hace explícita. La profesora Robinson parece pensar que el descubrimiento del fenómeno lógico del *reswitching* destruye la «economía neoclásica». ¿Cuál es la «economía neoclásica» que ha sido destruida? En este contexto considero que economía neoclásica es la que trata de las consecuencias lógicas de los dos principios, de minimización de costos y de ausencia de beneficios puros (*pure profits*), especialmente en estados estacionarios. No tiene que ver ciertamente con la adopción de modelos de uno o dos sectores. Desde este punto de vista —que puede no ser el de ella— toda la discusión *es* economía neoclásica. La posibilidad del *reswitching* es un teorema de la economía neoclásica, aun cuando este haya sido señalado primero por los oponentes a la teoría. Todo lo que esto significa es lo siguiente: decir que en algunos de los muchos modelos de bienes de capital puede ocurrir el *reswitching* es deducir una propiedad de esos modelos bajo el supuesto de minimización de costos y la ausencia de beneficios puros. Me doy cuenta que esta observación tiene el aire de *joining 'em since you can't lick 'em*, pero pienso que esta es una condición necesaria preliminar para comprender de qué trata todo este escándalo (Solow 1975: 49-50)[17].

Es decir, la minimización de costos y la ausencia de beneficios puros en el largo plazo es lo fundamental de la teoría neoclásica, es lo que hace a la teoría neoclásica, y no la adopción de modelos de uno o dos sectores. Visto así, como Solow mismo señala, el problema de la readopción de técnicas es un teorema de la economía neoclásica.

Lo más interesante, sin embargo, en el contexto del tema de este libro, es que Solow piensa que su modelo del año 1956 solo fue y es un instrumento útil para el trabajo empírico y no un aporte a la teoría económica:

> La profesora Robinson —dice— desea hacer creer que la «verdadera» economía neoclásica es el modelo de una mercancía con proporciones variables. Supongo que comparto cierta cantidad de la responsabilidad en el desarrollo y popularización de ese modelo. Pero en mi mente siempre ha sido una gruesa simplificación —a veces

---

Esta línea de trabajo es conocida como la moderna teoría del equilibrio general desarrollada por Arrow, Debreu, McKenzie y otros. Véase Harcourt 1976; y Garegnani 2003 y 2005.

[17] El beneficio normal es el retorno total mínimo sobre los insumos necesarios para mantener a una firma en una actividad de producción dada. En cambio el beneficio puro es el retorno total por encima de los costos totales; es denominado también beneficio económico. En el corto plazo existe la posibilidad de obtener un beneficio puro, pero las empresas percibirán a largo plazo solo el beneficio normal; no hay beneficio puro.

> útil y a veces, sin ninguna duda, engañosa— adecuado principalmente como una guía para el trabajo empírico. Nunca he pensado en ello como un aporte riguroso a la teoría económica, ni creo que he dado la impresión contraria. Cualquiera que lea los primeros párrafos de mi primera contribución a este tema verá que estuve preocupado de mostrar claramente cuan improbable —no cuan probable— es que una 'cantidad de capital' tecnológicamente confiable pueda ser definida. El modelo de un sector no fue inventado para darle sentido a la cantidad de capital. ¿Cómo podría Frank Ramsey haber tenido eso en mente? (Solow 1975: 48-59).

Solow finaliza su artículo afirmando que el fenómeno del *reswitching* no es, como aparentemente supone Joan Robinson, destructivo para la teoría neoclásica:

> No es verdad, incluso con todas las suposiciones estándar, que los estados estacionarios con menores tasas de interés tengan un mayor consumo por trabajador. Esto es interesante. No encuentro difícil vivir con este resultado, de modo que no veo cómo se le pueda considerar terriblemente subversivo para la teoría estándar. Suponga que, hace mucho tiempo y en otro país, se aceptaba la teoría estándar de la conducta del consumidor —maximización de utilidad sujeta a restricción presupuestaria— pero se pensaba de algún modo que esa teoría implicaba que todas las curvas de demanda tienen pendientes negativas. Entonces, alguien mostró que el bien Giffen era una clara posibilidad dentro de la teoría. Le habría tenido que dar un beso de despedida a la impecable generalización, y a sus inmediatas consecuencias también, pero la teoría de la demanda del consumidor evidentemente no se habría derrumbado por ello (Solow 1975: 51-52).

En relación a lo que queda por hacer en la teoría del crecimiento después de la controversia, Harcourt (1976) dice: «Una posibilidad [...] es el corto plazo keynesiano-kaleckiano y sus desarrollos los cuales han sido descuidados en la literatura de la teoría del crecimiento» (Harcourt 1976: 58). La idea sería relacionar entre si los cortos plazos en secuencias dinámicas con énfasis, por ejemplo, en el análisis de los patrones de tiempo de producción, o comparar situaciones de equilibrio en el contexto de «un análisis del proceso de acumulación de bienes de capital» (Harcourt 1976: 58-59) [18].

Pierangelo Garegnani también discute sobre el contenido de una teoría alternativa a la neoclásica. Esta tendría la influencia de la teoría clásica renovada por Sraffa. Dice que los elementos de esta teoría alternativa fueron adelantados «en las etapas iniciales de la controversia por Robinson, Kahn, Kaldor y otros autores ubicados en el lado crítico de la controversia». La preocupación de «llenar rápidamente el área enorme de

[18] Hay, sin duda, otras rutas que no podemos desarrollar en profundidad aquí. Solo mencionaremos como otras posibilidades, los desarrollos de esquemas dinámicos multisectoriales, la integración vertical y la producción conjunta, trabajados por Pasinetti y otros post keynesianos. Todos estos pueden ser la base de modelos teóricos alternativos.

los problemas del largo plazo que Keynes 'dejó cubiertos con fragmentos de cristales rotos'» —según afirmación de Joan Robinson— «podría, sin embargo, haber impedido que se derivaran de la reactivación del enfoque clásico todo lo que podía ofrecer incluso, en mi opinión, una consolidación y ampliación al largo período de los logros del propio Keynes sobre la demanda agregada» (Garegnani 2008: 24-25). Esta teoría alternativa trataría no solo de los problemas de estabilidad de las posiciones de largo plazo del sistema económico, sino también de la producción conjunta, de las rentas del capital fijo, del rol de las instituciones, y sobre todo debe «incluir análisis keynesiano de la demanda agregada, tanto para el corto plazo y, sobre todo, para largo plazo» (Garegnani 2008: 27).

Por otro lado, recordando la afirmación de Ricardo de que el principal problema de la teoría económica es determinar las leyes que regulan la distribución de ingresos entre rentas, beneficios y salarios, Pasinetti (2000) sostiene:

> [El] esquema neoclásico, en la versión de Arrow-Debreu, no necesita tasas de beneficio ni de salarios como tales. Determina los 'precios' de 'recursos' dados y solo 'precios'. [...] Con este marco conceptual, el desplazamiento de la teoría económica dominante en la dirección de la versión neoclásica que proviene del esquema de Arrow-Debreu, prácticamente ha supuesto una fuga general del análisis económico de la investigación y explicación de los problemas de la distribución del ingreso (y de la riqueza) (Pasinetti 2000: 43).

A pesar de este sesgo por el equilibrio general intertemporal, los problemas del crecimiento económico y del progreso técnico han vuelto a ser objeto de preocupación teórica como lo muestra —dice Pasinetti— el renacimiento de la teoría del crecimiento en la década de 1980 hasta nuestros días. Del tratamiento exógeno de la tecnología se empezó a teorizar sobre su generación por el propio sistema económico. Así surgieron los modelos de crecimiento endógeno, aunque, no obstante la controversia de las décadas de 1960 y 1970, fueron formulados en el contexto de la teoría neoclásica. Por esta razón, y no obstante su extraordinaria sofisticación «en términos de instrumentos analíticos», esos modelos adolecen de una «ingenuamente simplista visión el mundo» (Pasinetti 2000: 45). Esto es así porque se continúa utilizando las funciones de producción neoclásicas y sin discusión del problema de la agregación de los bienes físicos de capital heterogéneos. Lo mismo se hace con la cantidad física de capital humano, dice Pasinetti. La consecuencia es que se deja de lado el análisis de la distribución del ingreso. ¿Cuáles son entonces las rutas de trabajo teórico alternativas? «Nosotros podemos listar —afirma Pasinetti— cuatro líneas de investigación» (véase Pasinetti 2000: 51-55).

En primer lugar, desarrollar una teoría alternativa de precios de los factores y, por lo tanto, de la distribución del ingreso. Pasinetti menciona la construcción de modelos de crecimiento endógeno que, con la introducción del supuesto de imperfecciones en el mercado de capitales junto con el supuesto de una inicial desigual distribución de la riqueza, explican que estos supuestos influyen en la capacidad de los individuos de acceder a los distintos niveles de educación.

En segundo lugar, menciona investigaciones como las que incorporan en los modelos de crecimiento endógeno dos clases de agentes, uno propietario de bienes de capital y el otro propietario únicamente de su fuerza de trabajo. En este caso, el proceso de maximización de la misma función de utilidad hace que el primer tipo de agente tenga una propensión a ahorrar positiva y el otro tenga una propensión igual a cero. Esta es la ruta que, según Harcourt (1976), sugieren economistas marxistas. Se trataría de desarrollar una teoría del progreso técnico endógeno siguiendo el planteamiento de Marx para explicar el origen de los beneficios, de partir «de la esfera de la producción como opuesta a la esfera de la circulación y la distribución, en particular, [de] las condiciones mismas de trabajo y producción y [de] los modos de extracción de la plusvalía» (Harcourt 1976: 59).

En tercer lugar, Pasinetti menciona la introducción del canal de la política en los modelos de crecimiento endógeno. Cita el trabajo de Dennis Mueller como ejemplo de aquellos modelos que tratan de explicar los efectos de una decisión de elección pública orientada a redistribuir la riqueza existente, partiendo justamente de una distribución desigual de esta riqueza.

Finalmente, sugiere la línea de investigación que se focaliza en las desigualdades del ingreso personal y, especialmente, en los diferenciales salariales entre los trabajadores que operan en diversos niveles de responsabilidad y que corresponden a «diversos grados de educación o de antigüedad, dentro de una industria e incluso dentro de la misma firma, y también entre las diferentes ramas de la industria. […] El problema de los diferenciales de salarios es aun más complejo. Sorprendentemente se le ha dado poca atención en el pasado, a pesar de su innegable relación con los problemas de empleo, desempleo involuntario y, más generalmente, con la operación del 'mercado de trabajo', si es que este término particular puede ser usado en absoluto para el trabajo» (Pasinetti 2000: 55).

Pasinetti concluye su reflexión sobre las líneas de investigación, afirmando que nunca en la historia de la humanidad se ha registrado la aguda desigualdad en la distribución del ingreso y de la riqueza como la que ha caracterizado el fin del siglo XX. Este es el problema que requiere, por lo tanto, mayor atención en las investigaciones económicas. ¿Pero cuál es el esquema o enfoque teórico para este fin?

¿Qué es lo que está equivocado en la teoría económica neoclásica?

Solow se pregunta y responde:

1. La condición de ausencia de beneficio puro, simplemente universaliza el supuesto de competencia perfecta. Sería mucho mejor tener una teoría del equilibrio general no competitivo, y esto es cierto en la teoría estática así como en la teoría del capital [...].
2. La teoría depende de rendimientos constantes a escala y no tiene ninguna manera adecuada de tratar con los rendimientos crecientes. Estos están, por supuesto, estrechamente relacionados con el supuesto de competencia.
3. La mayor parte de los resultados alcanzables son acerca de estados de equilibrio y principalmente sobre estados estacionarios. Esto sin duda tiende a hacer excesivamente a-histórica y simplista a la economía neoclásica.
4. Importantes factores sociales no son tomados en cuenta, sobre todo en la teoría de la distribución: en particular, conflicto de clases. [...] Si la teoría económica neoclásica fuera [...] una representación razonablemente válida de la determinación de precios —incluyendo la distribución— entonces el conflicto de clase, la militancia del movimiento obrero, y otras fuerzas similares no serían excluidos absolutamente. Estas mismas fuerzas, salvo en las circunstancias muy extremas, operarían a través del mecanismo de la oferta y la demanda y alterarían los resultados. Las personas pueden diferir en cuanto al peso relativo que debe darse, en un momento determinado, a factores económicos relativamente estrechos (como la relativa escasez de los insumos de producción), frente a los factores políticos y sociales. Eso debería o podría ser una cuestión de evidencia.

   Cualesquiera que sean sus orígenes históricos, no veo que la lógica del análisis de la oferta y la demanda sea necesariamente una apologética capitalista. J.B. Clark pudo haber pensado que el producto marginal de cualquier cosa era su «justa recompensa». Pero ninguno de los participantes en este debate, de cualquier lado, tomaría esa idea en serio. La literatura sobre el equilibrio general y la economía del bienestar, después de todo, había avanzado en explicar precisamente por qué esa idea no era verdad. Si se diera el caso de que las relaciones de dominación y sumisión son los motores principales de la oferta o la demanda o de ambos, entonces debería ser posible mostrar su operación, incluso econométricamente [...].

   Estas son importantes limitaciones y deficiencias del análisis neoclásico en el campo general del que estamos hablando. Ofrecen un montón de temas de investigación. Pero lo interesante de esta lista de deficiencias es que ninguno de ellos tiene nada que ver con el *reswitching*. De hecho, como he señalado, toda la discusión sobre el *reswitching* se da dentro del marco de los supuestos neoclásicos. Entonces, ¿cuál *es* su significado? Bueno...

5. El fenómeno del *reswitching* demuestra que la extensión de la teoría neoclásica hacia parábolas fáciles puede ser engañosa. Por ejemplo, ahora está claro que no hay ninguna forma general de clasificar los procesos tecnológicos, simplemente como más o menos trabajo–intensivos, al menos no si uno quiere decir con estas palabras que tecnologías más intensivas en cuanto a trabajo de mano de obra siempre corresponden (en un estado determinado del conocimiento tecnológico) a un salario real más bajo y por lo tanto a una tasa de interés más alta a lo largo de la frontera de *precios de los factores* en equilibrio de estado estacionario. Más generalmente, y más importante, no es cierto, incluso con todos los supuestos estándar, que los estados estacionarios con tasas de interés más bajas tengan más altos consumos por trabajador (Solow 1975: 50-51).

> Puede ser útil recordar […] que toda una corriente alternativa de investigación —y precisamente las que provienen de la economía clásica en sus más modernas versiones, como las concebidas por Kalecki, Kaldor, Sraffa y muchos otros, quienes surgieron después y los siguieron— han sido dejados a un lado durante las últimas décadas. Sin embargo, la corriente clásica-keynesiana aparece de lejos como marco de pensamiento más favorable que el neoclásico para el desarrollo de investigaciones dentro de toda la organización institucional de los sistemas económicos, precisamente debido a su capacidad de absorber los cambios difusos provocados por la dinámica estructural impuesta por las nuevas tecnologías» (Pasinetti 2000: 60).

6. Reacciones a la controversia: modelos de crecimiento con capital heterogéneo

En esta sección se presentan los modelos con capital heterogéneo de generaciones de capital trabajados por Kaldor y Mirrlees (1962) y por Solow (1987).

El modelo de Kaldor y Mirrlees

Desde la segunda mitad de los años cincuenta, Nicholas Kaldor y James Mirrlees (1962) desarrollaron un nuevo modelo de crecimiento económico keynesiano que incorpora distintas generaciones de capital y presenta al progreso técnico como el principal motor del crecimiento económico.

Supuestos del modelo

A diferencia de los modelos anteriores, este modelo presenta algunas características que capturan aspectos de la realidad hasta entonces dejados de lado. En primer lugar, el modelo reconoce explícitamente que el progreso técnico se manifiesta a través de la creación de nuevo equipo, la cual depende de la inversión. De este modo, la función de progreso técnico exhibe una relación entre la tasa de inversión bruta por trabajador y la tasa de crecimiento de la productividad del trabajo ocupado en nuevo equipo. Segundo, el modelo considera el fenómeno de la obsolescencia causado por la disminución progresiva y continua de la rentabilidad del equipo instalado en el pasado, el cual no puede competir con las generaciones de capital más modernas. Asimismo, la duración de la vida operativa del capital se relaciona con factores económicos independientemente de que exista depreciación física del capital o no.

Tercero, además de la obsolescencia, el modelo también asume que existe depreciación física. Los autores la denominan depreciación física «radioactiva» o descomposición «radioactiva». Este tipo de depreciación se caracteriza por generar la destrucción total de una parte del *stock* de capital, como si ocurriera un incendio o un accidente en cada período que ocasiona la desaparición de una proporción del capital existente de período a período. Cuarto, debido a las dificultades para medir el *stock* de capital, causada por la inclusión de progreso técnico y obsolescencia continuos, el modelo deja de lado esa variable y su tasa de crecimiento, operando solo con los valores de la inversión bruta corriente, es decir, inversión bruta fija en capital por unidad de tiempo, y con los valores de su tasa de crecimiento. Finalmente, en este modelo se presentan formalmente el comportamiento de los inversionistas y sus decisiones de inversión bajo incertidumbre, los cuales difieren de los otros modelos.

Por otro lado, este modelo comparte con los modelos keynesianos el supuesto de que el ahorro es pasivo, mientras que la inversión está determinada por las decisiones de los inversionistas y es independiente de la tasa de ahorro. Se trata de una economía en la cual el nivel de ingreso y de beneficios generará el ahorro suficiente para satisfacer los requerimientos de la inversión. Al igual que los modelos convencionales, se trata de una economía cerrada con progreso técnico exógeno continuo y una tasa de crecimiento de la población constante determinada exógenamente. Asimismo, se asume que la inversión es inducida por el crecimiento de la producción y que se dan condiciones en la economía que propician el crecimiento con pleno empleo.

El modelo adopta el supuesto de que los empresarios, con el fin de maximizar sus beneficios, desean incrementar el tamaño de su negocio y para ello prefieren mantener algún exceso de capacidad que les permita incrementar su participación en el mercado o penetrar nuevos mercados. Las decisiones de inversión, en todos los períodos, están determinadas por el deseo de los inversionistas de mantener cierto ratio de capacidad productiva y ventas esperadas.

Condición para el crecimiento con pleno empleo

La tasa de crecimiento efectiva, la cual es determinada endógenamente por la operación conjunta del acelerador y del multiplicador (g), debe ser mayor que la tasa natural de crecimiento (g_n), es decir, la suma de las tasas de crecimiento del trabajo y de su productividad media ($n+\bar{\rho}$) en condiciones de oferta ilimitada de mano de obra. Si se cumple esta condición, a partir de una situación de exceso de oferta en el mercado de trabajo y desempleo, el crecimiento continuo conducirá al pleno empleo tarde o temprano. Una vez alcanzado el pleno empleo, se logra la igualdad entre la tasa de crecimiento natural, y la tasa de crecimiento efectiva (Kaldor & Mirrlees 1962: 175).

- Antes del pleno empleo: $g > g_n = n + \bar{\rho}$ con oferta ilimitada de mano de obra.
- En pleno empleo: $g = g_n = n + \bar{\rho}$

Eventualmente, la inversión en equipo de última generación superará el nivel de empleo disponible para trabajar en la nueva planta, por lo que, en algún momento, la inversión se verá restringida por la mano de obra disponible para operar el nuevo equipo. Así, dado el supuesto de pleno empleo, las decisiones acerca del volumen de inversión dependerán del número de trabajadores disponibles en cada período y del monto de inversión por trabajador.

Además, se asume que no es posible incrementar la productividad del trabajo reduciendo el número de trabajadores empleados en el equipo existente. Por otro lado, las máquinas de cada generación presentan eficiencia física constante durante su vida económica. Es decir, el crecimiento de la productividad de la economía depende directamente de la inyección de nuevo capital al sistema.

El modelo

Denotamos λ_t como el número de trabajadores disponible para operar nuevo equipo en el período t; y la inversión bruta en capital fijo, la fuerza laboral y el producto nacional bruto en t como I_t, L_t y Y_t, respectivamente. La inversión por trabajador en capital de la generación t y el producto per cápita se representan como i_t y y_t.

(1) $i_t = \dfrac{I_t}{\lambda_t}$

(1') $y_t = \dfrac{Y_t}{L_t}$

Dado que el crecimiento de la productividad de la economía depende directamente de la creación de nuevo equipo, el supuesto básico del modelo es la existencia de una función de progreso técnico que establece que la variación de la productividad por trabajador en las plantas de última generación, ℓ_t, depende de la tasa de crecimiento de la inversión per cápita o por trabajador, de la generación *t*:

(2) $$\frac{\dot{\ell}_t}{\ell_t} = f\left(\frac{\dot{i}_t}{i_t}\right)$$

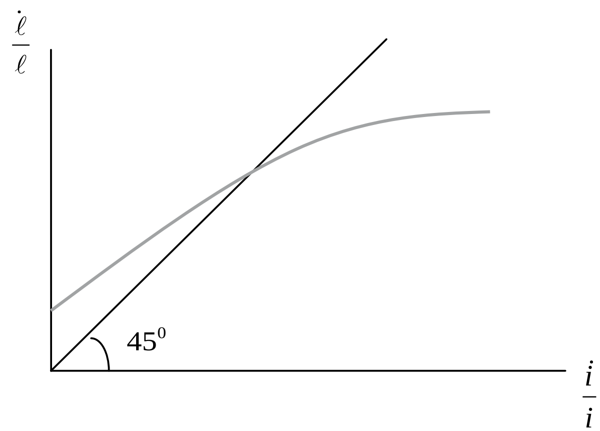
Esta función de progreso técnico cumple con las siguientes condiciones:

$$f(0) > 0, \qquad f' > 0, \qquad f'' < 0$$

En otras palabras, es una función creciente en la tasa de crecimiento de la inversión y cóncava, es decir, ante incrementos continuos de la tasa de crecimiento de la inversión per cápita, la productividad por trabajador en la nueva maquinaria aumenta pero cada vez a menor ritmo (véase gráfico 3.11).

El producto por trabajador, al igual que la inversión por trabajador, está medido en valores monetarios deflactados por un índice de precios de una canasta de bienes de consumo de los asalariados (canasta de «bienes-salario»). Para simplificar el modelo, se asume que la tasa de crecimiento del progreso técnico (medida por el crecimiento de la productividad) es igual en todos los sectores de la economía y por lo tanto, los precios relativos se mantienen constantes. De este modo, se eliminan las posibles variaciones entre los precios de los bienes-salario y de los bienes que se consumen con los beneficios, dejando la función $f(.)$ inalterada.

Gráfico 3.11
Función de progreso técnico en la operación del capital de última generación



El comportamiento de los inversionistas frente a las situaciones de riesgo e incertidumbre puede ser modelado por medio de dos supuestos:

(a) Los inversionistas solo invertirán en su propia empresa en la medida de que ello sea consistente con mantener la capacidad de sus activos fijos de generar ganancias por encima de cierto nivel mínimo, que en su opinión representa la capacidad de los activos fijos de la economía en general de generar ganancias.

De esta manera, los inversionistas desean mantener su posición financiera para no incurrir en riesgos de quiebra, pues, si las ganancias derivadas de la nueva inversión en una empresa son bajas en relación al capital empleado (o si crece a una menor tasa que la tasa a la que crece el valor contable de los activos fijos), los activos fijos tendrán una mayor participación en los recursos totales de la firma, incluyendo su capacidad potencial de crédito para una tasa de crecimiento dada. De este modo, la posición financiera de la empresa se hará cada vez más débil, lo que acentuará los riesgos de quiebra.

Se asume, por lo tanto, que la sumatoria del beneficio esperado por el uso del nuevo equipo a lo largo de su período de funcionamiento previsto, o período de vida, *T*, generará una tasa de beneficio al menos igual a la tasa de beneficio para las nuevas inversiones en la economía en conjunto. Esto se representa en la ecuación (3):

$$(3) \quad i_t \leq \int_t^{t+T} e^{-(\phi+\delta)(\tau-t)}(\ell_t - w_\tau^e)\,d\tau$$

Donde δ es la tasa de depreciación «radioactiva», ϕ es la tasa general de beneficio supuesta por el empresario y w^e_T es la tasa esperada de salario, que es una función creciente del tiempo. La ecuación (3) establece que la inversión por trabajador en capital de la generación *t* es igual al beneficio generado por la fábrica que opera con capital de dicha generación, descontado por la tasa general de ganancia y la depreciación durante todo el tiempo de funcionamiento previsto del capital de la generación *t* (es decir, *T* períodos, pues el *stock* de capital es fabricado en el período *t* y tiene una vida útil de *T* períodos). La variable τ es la variable de integración. Integrar la ecuación (3) en τ desde $\tau = t$ hasta $\tau = t + T$, implica agregar los beneficios generados en cada período de funcionamiento del capital de la generación *t* hasta que se cumplan los *T* períodos de funcionamiento del capital (es decir, hasta que se vuelva obsoleto).

La ecuación (3) postula condiciones bajo las cuales el monto de financiamiento que puede disponer una firma es considerablemente mayor que su gasto en capital fijo, de modo que la firma es libre de variar su gasto de inversión total por unidad de tiempo. Estos supuestos son consistentes con una racionalidad de la firma que busca maximizar la tasa de beneficio de las acciones de la firma, lo cual implica decisiones racionales distintas a la maximización de la tasa de beneficio de la inversión fija.

b) Las expectativas sobre el futuro más distante implican mayor incertidumbre y están asociadas a mayor riesgo en relación a las menos distantes. Como consecuencia de la incertidumbre generada por la obsolescencia del capital, el costo de los activos fijos tiene que ser recuperado dentro de un cierto período de tiempo, es decir, que el beneficio bruto que procuren en los primeros *h* años de su funcionamiento tiene que ser suficiente para reembolsar el costo de la inversión.

$$(4)\quad i_t \leq \int_t^{t+h} (\ell_t - w_\tau^e)\, d\tau$$

El modelo asume además que si la ecuación (4) se cumple, entonces la ecuación (3) se cumple. Por lo tanto, se puede reescribir (4) como la igualdad:

$$i_t = \int_t^{t+h} (\ell_t - w_\tau^e)\, d\tau$$

La suma no descontada de beneficios a lo largo de *h* períodos tiene que ser igual a la inversión por operario en máquinas de la generación *t* (i_t).

Asimismo, al igual que en los modelos clásicos y keynesianos, el ingreso se divide en dos categorías: beneficios y salarios. Se asume que el ahorro que financia la inversión fija es igual a una proporción constante, *s*, de los beneficios brutos. La ecuación (5) presenta la proporción que representan los beneficios en el ingreso total, *b*:

$$S_t = I_t \quad \rightarrow \quad sB_t = I_t \quad \rightarrow \quad sb_t Y_t = I_t$$

$$(5)\quad b_t = \frac{1}{s}\frac{I_t}{Y_t}$$

Utilizando la ecuación (1) e introduciendo el término *z*, el cual es igual a λ_t / L_t, donde L_t es la fuerza laboral total en el período *t* y λ_t es el número de trabajadores disponibles para operar el nuevo equipo por período, podemos expresar la ecuación (5) como:

$$b_t = \frac{z}{s}\frac{i_t}{y_t}$$

Se asume además que una vez instalado el nuevo equipo, el número de trabajadores empleados en esa fábrica disminuirá conforme transcurra el tiempo debido al desgaste físico del capital hasta que este sea desechado por obsoleto. Denominando δ a la tasa de descomposición «radioactiva» y *T* (*t*) a la edad del equipo que se vuelve obsoleto en el período *t*, se obtiene la siguiente relación para la distribución de la fuerza laboral:

$$(6)\ L_t = \int_{t-T}^{t} \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d\tau$$

Donde λ_τ es el número de empleados en la fábrica de la generación τ. La fuerza laboral empleada total de la economía en el período t es igual a la fuerza laboral ocupada en las fábricas de cada generación de capital en funcionamiento descontada por la depreciación del *stock* de capital de cada generación, pues el número de trabajadores empleados en cada generación de capital se reduce con la depreciación física del *stock* de capital.

Asimismo, el producto total en el período t será igual al número de empleados en la fábrica de generación τ multiplicado por la productividad por trabajador empleado en la generación de capital τ, descontado por la depreciación del capital (donde τ va desde $t - T$ a t, es decir, todas las generaciones que se encuentran en funcionamiento):

$$(7)\ Y_t = \int_{t-T}^{t} \ell_\tau \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d\tau$$

La división del producto en salarios y beneficios da lugar a la siguiente ecuación:

$$(8)\ (1-b_t)Y_t = L_t w_t$$

Donde w_t es la tasa salarial en el período t. Por otro lado, dado que el capital de la generación más antigua seguirá operando mientras cubra los costos variables, el beneficio de la fábrica de mayor antigüedad será cero. Por lo tanto,

$$(9)\ w_t = \ell_{t-T}$$

Es decir, el salario en el período t será igual a la productividad por trabajador empleado en la fábrica de mayor antigüedad (ℓ_{t-T}). Se asume además que la población crece a una tasa constante n, de este modo:

$$(10)\ \dot{L}_t = nL_t$$

Por otro lado, el modelo supone que los empresarios prevén que los salarios en términos de unidades de producto aumentarán en el futuro previsible a la misma tasa a la que ha venido elevándose durante los últimos j períodos. Por lo tanto, la tasa salarial esperada en el período futuro T será igual a:

$$(11)\ w_T^e = w_t \left(\frac{w_t}{w_{t-j}} \right)^{\frac{T-t}{j}}$$

Finalmente, el salario no puede estar por debajo de un nivel de salario mínimo determinado por las necesidades básicas de subsistencia convencionalmente aceptadas.

Por otro lado, la participación de los beneficios en el ingreso total debe ser superior a un nivel denominado grado de monopolio o de competencia imperfecta, m[19].

$$w_t \geq w \min , \quad b_t \geq m$$

A continuación, presentamos la resolución del modelo en el estado estacionario. Además, se demuestra la existencia de un único equilibrio y se halla una solución numérica para las variables del modelo asumiendo ciertos valores para los parámetros. Concluimos esta sección con las recomendaciones de política que se desprenden de este modelo.

El estado estacionario

En este modelo, el equilibrio o *golden age*, se halla cuando la tasa de crecimiento del producto per cápita es igual a la tasa de crecimiento de la productividad del nuevo equipo y ambas tasas son iguales a la tasa de crecimiento de la inversión fija por trabajador y la tasa de crecimiento de los salarios:

$$\frac{\dot{y}}{y} = \frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{\dot{i}}{i} = \frac{\dot{w}}{w}$$

En el estado estacionario, el ratio inversión–producto, I / Y, la participación de los beneficios en el ingreso total, b, y la duración de la vida económica del capital, T, son constantes. El modelo consta de diez ecuaciones, las ecuaciones (1) al (11), que permiten hallar valores para las variables endógenas, I_t, i_t, λ_t, ℓ_t, w_t, w^e_t, b_t, T, y_t, L_t, en términos de los parámetros s, h, δ y n. Pero la ecuación (3) es solo una condición límite (*boundary condition*).

En la resolución del modelo, las 10 ecuaciones son trabajadas de modo que se obtenga un sistema de ecuaciones simultáneas en i / y, w / y y ℓ / y, ratios que se mantienen constantes en el estado estacionario, en términos de los parámetros y de las variables endógenas z, T. Nótese que z es igual a λ_t / L_t. Posteriormente se hallan dos ecuaciones que determinan los valores de equilibrio de z, T. Una vez halladas estas soluciones, se encuentran los valores para i / y, w / y y ℓ / y, y con estos resultados se hallan todas las variables endógenas.

[19] Kaldor (1970) acepta la crítica de Nuti (1969) quien señala que si se supone competencia imperfecta, el equipo de una empresa maximizadora de beneficios típica será abandonada antes de que las cuasi rentas de este equipo caiga a cero. Esto significa que la ecuación (9) debería tener la forma siguiente:

$$\ell_{t-T} = \frac{w_t}{1-m}$$

Donde m es el grado de monopolio o mínimo beneficio requerido para continuar la operación de un equipo de cualquier particular generación.

El modelo de Kaldor y Mirrlees (1962)

En resumen, el modelo está compuesto por las siguientes ecuaciones:

(1) $i_t = \dfrac{I_t}{\lambda_t}$	Inversión por trabajador en capital de la generación t
(1') $y_t = \dfrac{Y_t}{L_t}$	Producto per cápita
(2) $\dfrac{\dot{\ell}_t}{\ell_t} = f\left(\dfrac{\dot{i}_t}{i_t}\right)$	Tasa de crecimiento de la productividad por trabajador en las plantas de generación t
(3) $i_t \leq \int_t^{t+T} e^{-(\phi+\delta)(\tau-t)}(\ell_t - w_\tau^e)d\tau$	Beneficio neto esperado por el uso del capital de generación t durante su período de vida. Esta es una condición límite.
(4) $i_t = \int_t^{t+h} (\ell_t - w_\tau^e)d\tau$	Beneficio bruto generado por el uso del capital de generación t durante los h primeros años de funcionamiento.
(5) $b_t = \dfrac{1}{s}\dfrac{I_t}{Y_t}$, $b_t = \dfrac{z}{s}\dfrac{i_t}{y_t}$	Participación de los beneficios en el producto (donde $z = \lambda_t / L_t$)
(6) $L_t = \int_{t-T}^{t} \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)}d\tau$	Fuerza laboral total empleada en el período t
(7) $Y_t = \int_{t-T}^{t} \ell_\tau \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)}d\tau$	Producto total en el período t
(8) $(1-b_t)Y_t = L_t w_t$	Masa salarial
(9) $w_t = \ell_{t-T}$	Tasa salarial
(10) $\dot{L}_t = nL_t$	Dinámica de la fuerza laboral
(11) $w_T^e = w_t\left(\dfrac{w_t}{w_{t-j}}\right)^{\frac{T-t}{j}}$	Tasa salarial esperada en el período futuro T

Las variables endógenas son I_t, i_t, λ_t, ℓ_t, w_t, w^e_t, b_{y_t}, T, y_t, L_t. Dados los parámetros s, h, δ y n y la forma de la función $f(.)$, con las ecuaciones descritas, puede hallarse la solución para las 10 variables endógenas.

La inversión por trabajador

Los supuestos sobre la función de progreso técnico implican que existe algún valor $\dot{\ell} / \ell = \gamma$ en el cual se cumple:

$$\frac{\dot{\ell}}{\ell} = \frac{\dot{i}}{i} = \gamma$$

El equilibrio es posible solo cuando esta igualdad se cumple. Integrando la ecuación (4) y utilizando el valor de w^e_T de la ecuación (11) se obtiene:

$$i_t = \int_t^{t+h} (\ell_t - w^e_\tau)\, d\tau = \int_t^{t+h} \ell_t d\tau - \int_t^{t+h} w^e_\tau\, d\tau$$

$$i_t = \ell_t [\tau]_t^{t+h} - \int_t^{t+h} \left[w_t \left(\frac{w_t}{w_{t-j}} \right)^{\frac{\tau-t}{j}} \right] d\tau$$

$$i_t = \ell_t (t+h-t) - w_t \int_t^{t+h} \left[\left(\frac{w_t}{w_{t-j}} \right)^{\frac{\tau-t}{j}} \right] d\tau$$

De acuerdo con la ecuación (11), los inversionistas esperan que el salario crezca a una tasa constante igual a la que ha crecido durante los últimos j períodos. Si denominamos a esta tasa esperada como v, tenemos:

$$w_t = w_0 e^{\nu t}$$

$$w_{t-j} = w_0 e^{\nu (t-j)}$$

Por lo tanto,

$$\frac{w_t}{w_{t-j}} = \frac{w_0 e^{\nu t}}{w_0 e^{\nu (t-j)}} = e^{\nu j}$$

Reemplazando este valor en la integral de (4):

$$i_t = \ell_t h - w_t \int_t^{t+h} \left(e^{\nu j} \right)^{\frac{\tau - t}{j}} d\tau$$

$$i_t = \ell_t h - w_t \int_t^{t+h} e^{\nu (\tau - t)} d\tau$$

$$i_t = \ell_t h - w_t \left[\frac{e^{\nu(\tau - t)}}{\nu} \right]_t^{t+h}$$

$$i_t = \ell_t h - \frac{w_t}{\nu} \left[e^{\nu(t+h-t)} - e^{\nu(t-t)} \right]$$

$$i_t = \ell_t h - \frac{w_t}{\nu} (e^{\nu h} - 1)$$

Reordenando, se obtiene la ecuación (12)

(12) $i_t = h\,\ell_t - w_t \dfrac{e^{\nu h} - 1}{\nu}$

La productividad del capital de la generación t, ℓ, solo podría crecer más rápido que i en el largo plazo, si w estuviera creciendo más rápido que ℓ. Si w crece más rápido que ℓ, la vida económica del capital, T, se reduciría continuamente, lo que llevaría al desempleo y al estancamiento antes de que T descienda a h, punto en el que la tasa de beneficio se tornaría negativa. En otras palabras, llegará un momento en el que los beneficios serán negativos, pues la duración del *stock* de capital será incluso menor que el período necesario para recuperar el costo incurrido al llevar a cabo la compra de la maquinaria ($T < h$). En otras palabras, el *stock* de capital de las nuevas generaciones se hace obsoleto cada vez más rápido, por lo cual la inversión pierde rentabilidad período a período. Por otro lado, ℓ, no puede crecer más lento que i en el largo plazo, pues w no puede caer por debajo de su nivel mínimo de subsistencia. Incluso antes de que se produzca esa caída, la economía entraría en una crisis de inflación, pues la demanda aumentaría con mayor rapidez que la oferta.

Estabilidad del modelo

Por lo general el modelo es estable, sin embargo, la inestabilidad se manifiesta cuando la tasa de crecimiento del salario ($\dot{w} / w$) difiere significativamente de la tasa de crecimiento de la productividad de la última generación de capital ($\dot{\ell} / \ell$). Por ejemplo, si se produjera una contracción en la función de progreso técnico, la tasa de crecimiento de ℓ disminuiría y si se encontrara por debajo de la tasa de crecimiento de w por un período de tiempo considerable, entonces, es probable que se reduzca la inversión y la economía experimente desempleo y recesión. Según los autores, esta podría haber sido una de las causas del «repentino colapso de la eficiencia marginal del capital» en la década de 1920 a 1930, la cual se tradujo posteriormente en la Gran Depresión. En el caso contrario, si se desplazara hacia arriba la función de progreso técnico, entonces la tasa de crecimiento de ℓ superaría a la tasa de crecimiento de w, desatándose así un proceso inflacionario en la economía.

Si la tasa de crecimiento del salario no diverge considerablemente de la tasa de crecimiento de la productividad de la última generación de capital, entonces se asegura la estabilidad del modelo. De este modo, si la tasa de crecimiento de la inversión por trabajador ($\dot{i}/i$) es menor que la tasa a la que crece la productividad por trabajador ($\dot{\ell}/\ell$), $\dot{i}/i$ aumentará. Si $\dot{i}/i$ fuese menor que $\dot{\ell}/\ell$, $\dot{i}/i$ disminuirá.

La variación en el empleo y el producto

Utilizando las ecuaciones anteriores, es posible hallar una expresión para λ_t, la cantidad de trabajadores disponible para ser empleados en la operación del capital de generación *t*.

Simplificando la ecuación (6), tenemos:

$$L_t = \int_{t-T}^{t} \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d\tau = \int_{t-T}^{t} \lambda_\tau e^{-\delta t} e^{\delta \tau} d\tau$$

$$L_t = e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} \lambda_\tau e^{\delta \tau} d\tau$$

Para hallar la variación en la fuerza laboral total, se requiere derivar esta ecuación con respecto a *t*, para ello se utiliza la regla de la cadena y además empleamos el «segundo teorema fundamental del cálculo integral» para obtener la derivada de una integral.

De este modo, se obtiene:

$$\dot{L}_t = (-\delta)\left[e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} \lambda_\tau e^{\delta\tau} d\tau \right] + e^{-\delta t}\left[\lambda_t e^{\delta t}\left(\frac{dt}{dt}\right) - \lambda_{t-T} e^{\delta(t-T)}\left(\frac{dt-dT}{dt}\right)\right]$$

$$\dot{L}_t = (-\delta)\left[e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} \lambda_\tau e^{\delta\tau} d\tau \right] + e^{-\delta t}\left[\lambda_t e^{\delta t} - \lambda_{t-T} e^{\delta(t-T)}\left(1-\frac{dT}{dt}\right)\right]$$

Resolución matemática: la regla de la cadena

La regla de la cadena es una fórmula para derivar una función que depende de otra función. Según esta regla, si definimos la variable $y = f(x)$ y la variable $z = g(y)$, entonces la derivada de z con respecto a x será igual a:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dg(y)}{dx} = \frac{dg(f(x))}{dx} = \frac{dg(y)}{df(x)} \; \frac{df(x)}{dx}$$

El primer corchete puede reemplazarse por L_t, porque es igual a la ecuación (6). Considerando esto y simplificando el segundo corchete, tenemos:

$$\dot{L}_t = -\delta L_t + \lambda_t - \lambda_{t-T} e^{-\delta T}\left(1 - \frac{dT}{dt}\right)$$

Despejando λ_t:

$$(13)\ \lambda_t = \dot{L}_t + \delta L_t + \lambda_{t-T}\left(1 - \frac{dT}{dt}\right) e^{-\delta T}$$

Es decir, el número de trabajadores disponibles para ser empleados en la operación del capital de última generación (λ_t) es igual a:

a) Los nuevos trabajadores que se integran a la creciente fuerza laboral ($\dot{L}_t$).

b) Los trabajadores que ya no son necesitados en las fábricas de todas las generaciones debido al desgaste físico del capital (δL_t).

c) Los trabajadores despedidos de las fábricas que cierran porque el capital se vuelve obsoleto ($\lambda_{t-T}(1 - dT/dt)e^{-\delta T}$).

Simplificando la ecuación (7):

$$Y_t = \int_{t-T}^{t} \ell_\tau \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d\tau = \int_{t-T}^{t} \ell_\tau \lambda_\tau e^{-\delta t} e^{\delta\tau} d\tau$$

$$Y_t = e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} \ell_\tau \lambda_\tau e^{\delta\tau} d\tau$$

Resolución matemática: el teorema fundamental del cálculo integral

El teorema fundamental del cálculo integral afirma que la derivación es la operación inversa a la integración. Es decir, si definimos $f(x)$ como una función continua integrable y definimos $F(x)$ como la integral de $f(x)$, tenemos que la derivada de $F(x)$ será igual a $f(x)$.

$$F(x) = \int f(x)dx \qquad \rightarrow \qquad F'(x) = \left[\int f(x)dx\right]' = f(x)$$

El segundo teorema fundamental del cálculo integral especifica que, si $f(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y la función $g(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, es decir, $g'(x) = f(x)$, entonces se cumple que:

$$\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$$

Por lo tanto, podemos utilizar este teorema para obtener la derivada de la integral en el rango $[a, b]$:

$$\left[\int_a^b f(x)dx\right]' = g'(b) - g'(a) = f(b) - f(a)$$

Diferenciando con respecto al tiempo y aplicando nuevamente el segundo teorema del cálculo integral, tenemos:

$$\dot{Y}_t = (-\delta)\left[e^{-\delta t}\int_{t-T}^{t}\ell_{\tau}\lambda_{\tau}e^{\delta\tau}d\tau\right] + e^{-\delta t}\left[\ell_t\lambda_t e^{\delta t} - \ell_{t-T}\lambda_{t-T}e^{\delta(t-T)}(1-\frac{dT}{dt})\right]$$

De la ecuación (7) se desprende que el término dentro del primer corchete es igual a Y_t, y simplificando el segundo corchete, se obtiene:

$$\dot{Y}_t = -\delta Y_t + \ell_t\,\lambda_t - \ell_{t-T}\lambda_{t-T}e^{-\delta T}\left(1-\frac{dT}{dt}\right)$$

Finalmente, reordenando los términos, se tiene:

$$\dot{Y}_t = \ell_t\lambda_t - \ell_{t-T}\lambda_{t-T}\left(1-\frac{dT}{dt}\right)e^{-\delta T} - \delta Y_t$$

Reordenando la ecuación (13) se obtiene:

$$\lambda_{t-T}\left(1-\frac{dT}{dt}\right)e^{-\delta T} = \lambda_t - \dot{L}_t - \delta L_t$$

Reemplazando este valor, y el valor de $\ell_{t-T} = w_t$ de la ecuación (9) en la ecuación de $\dot{Y}_T$ que acabamos de obtener de la ecuación (7), se obtiene:

$$\dot{Y}_t = \ell_t\lambda_t - w_t\left(\lambda_t - \dot{L}_t - \delta L_t\right) - \delta Y_t$$

Dividiendo ambos lados por $Y_t = L_t\, y_t$:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\ell_t\,\lambda_t}{L_t y_t} - \frac{w_t\left(\lambda_t - \dot{L}_t - \delta L_t\right)}{L_t\, y_t} - \frac{\delta Y_t}{L_t y_t}$$

Recordemos que $z = \lambda_t / L_t$. Además, por la ecuación (10), L_t crece a una tasa constante n. De este modo, la última ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = z\frac{\ell_t}{y_t} - \frac{w_t}{y_t}\frac{\left(\lambda_t - \dot{L}_t - \delta L_t\right)}{L_t} - \delta$$

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = z\frac{\ell_t}{y_t} - \frac{w_t}{y_t}\left(z - n - \delta\right) - \delta$$

Asimismo, dado que la tasa de crecimiento del producto per cápita puede descomponerse en la tasa de crecimiento del producto total menos la tasa de crecimiento de la población, entonces $\dot{Y}_t \,/\, Y_t$ se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{\dot{Y}_t}{Y_t} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} + \frac{\dot{L}_t}{L_t} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} + n$$

Incluyendo esta tasa de crecimiento en el lado izquierdo de la ecuación anterior:

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} + n = z\frac{\ell_t}{y_t} - \frac{w_t}{y_t}\left(z - n - \delta\right) - \delta$$

Reordenando los términos se obtiene la ecuación (14):

$$(14)\ \frac{\dot{y}_t}{y_t} + n + \delta = z\frac{\ell_t}{y_t} - \left(z - n - \delta\right)\frac{w_t}{y_t}$$

La tasa de crecimiento del salario y la duración económica del capital

Para que las expectativas de los inversionistas se cumplan, la tasa de crecimiento del salario debe mantenerse constante a lo largo del tiempo.

$$(15)\ \frac{\dot{w}_t}{w_t} = \eta$$

Donde η es una constante.

De este modo, puede demostrarse que si η es una constante, entonces T también será constante, y esto se producirá con una tasa de crecimiento que satisfaga la siguiente condición:

$$\gamma < \frac{s}{h} - n - \delta$$

Tomando logaritmos a la ecuación (9) y derivando con respecto al tiempo se obtiene:

$$\ln \ell_{t-T} = 1\mathrm{n}\ w_t$$

$$(16)\ \frac{\dot{w}_t}{w_t} = \frac{\dot{\ell}_{t-T}}{\ell_{t-T}}\left(1 - \frac{dT}{dt}\right)$$

Dado que η es la tasa de crecimiento del salario, y es constante, y γ es la tasa de crecimiento del progreso técnico en capital de la nueva generación que iguala la tasa de crecimiento de la inversión por trabajador del capital de generación t, por lo tanto:

$$\eta = \gamma\left(1 - \frac{dT}{dt}\right)$$

Puesto que el ratio η / γ es constante, tenemos:

$$\frac{\eta}{\gamma} = 1 - \frac{dT}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = 1 - \frac{\eta}{\gamma}$$

Integrando con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\int \frac{dT}{dt} dt = \int \left(1 - \frac{\eta}{\gamma}\right) dt$$

(17) $T = T_0 + \left(1 - \dfrac{\eta}{\gamma}\right) t$

Donde T_0 es la duración de la vida económica del capital de la generación inicial, $t = 0$. Dividiendo (13) entre L_t, tenemos:

$$\frac{\lambda_t}{L_t} = \frac{\dot{L}_t}{L_t} + \delta \frac{L_t}{L_t} + \frac{\lambda_{t-T}}{L_t}\left(1 - \frac{dT}{dt}\right) e^{-\delta T}$$

Recordando la definición de z_t, n y dT / dt de las ecuaciones (10) y (16), se tiene:

$$z_t = n + \delta + \frac{\lambda_{t-T}}{L_t}\left[1 - \left(1 - \frac{\eta}{\gamma}\right)\right] e^{-\delta T}$$

Multiplicando y dividiendo el segundo término del lado derecho por L_{t-T}, tenemos:

$$z_t = n + \delta + \frac{\lambda_{t-T}}{L_{t-T}} \frac{L_{t-T}}{L_t}\left(\frac{\eta}{\gamma}\right) e^{-\delta T}$$

$$z_t = n + \delta + z_{t-T} \frac{L_{t-T}}{L_t}\left(\frac{\eta}{\gamma}\right) e^{-\delta T}$$

De la ecuación (10), sabemos que:

$$\frac{\dot{L}_t}{L_t} = n \qquad \rightarrow \qquad L_t = L_0 e^{nt} \qquad \rightarrow \qquad L_{t-T} = L_0 e^{n(t-T)}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación anterior, finalmente se obtiene:

$$z_t = n + \delta + z_{t-T}\left(\frac{\eta}{\gamma}\right) e^{-nT} e^{-\delta T}$$

(18) $$z_t = n + \delta + z_{t-T} e^{-(n+\delta)T} \frac{\eta}{\gamma}$$

Casos en los que la tasa de crecimiento del salario difiere de la tasa de crecimiento del progreso técnico en capital de la nueva generación

En el estado estacionario, se cumple que $T = T_0$ y $\eta = \gamma$. Para mostrarlo, tenemos primero que considerar qué sucede en los casos en los que $\eta \neq \gamma$.

(i) Si $\gamma < \eta$, los beneficios de los inversionistas tarde o temprano se volverán negativos, pues la productividad del capital de la última generación crece a menor tasa que los salarios. Es así que, según la ecuación (16), que es igual a la ecuación (9) reorganizada, la duración de la vida económica del capital disminuirá en el tiempo ($dT / dt < 0$). Por lo tanto, llegará un momento en el que la vida económica del capital (T) será menor que el tiempo que le toma a la firma recuperar la inversión (h). De este modo, dado que $T < h$, los beneficios eventualmente serán negativos y no habrá crecimiento.

(ii) Si $\gamma > \eta$, de acuerdo con la ecuación (17), T se vuelve indefinidamente grande en el tiempo. Esta proposición no es consistente con la realidad, pues, aun dejando de lado la obsolescencia, la mayoría de bienes de capital presentan un período de vida físico limitado. Si T tiende a infinito, entonces, de la ecuación (18) se desprende que z tiende a $n + \delta$. Dado que la productividad del equipo de la última generación crece más rápido que los salarios, la participación de los salarios en el producto será cada vez menor en relación a la creciente participación de los beneficios. Es decir, el ratio w / y se acercará a cero, mientras que la participación de los beneficios, b, tenderá a la unidad.

Por lo tanto, dividiendo las ecuaciones (1) y (1'), tenemos:

$$i_t = \frac{I_t}{\lambda_t} \quad , \quad y_t = \frac{Y_t}{L_t}$$

$$\frac{i_t}{y_t} = \frac{I_t / \lambda_t}{Y_t / L_t} = \frac{L_t I_t}{\lambda_t Y_t}$$

Recordando la definición de $z_t = \lambda_t / L_t$, tenemos:

$$\frac{i_t}{y_t} = \frac{1}{z_t} \frac{I_t}{Y_t}$$

Además, dado que b tiende a la unidad, $I_t = sY_t$. Entonces, si $\gamma > \eta$, y T tiende a infinito, $I_t / Y_t = s$ y i_t / y_t tiende a:

$$\frac{i_t}{y_t} = \frac{1}{z} s$$

Asimismo, como acabamos de mencionar, z tiende a $n + \delta$ cuando T tiende a infinito, tenemos:

$$(19) \quad \frac{i}{y} \rightarrow \frac{s}{n+\delta}$$

De la ecuación (12), si w tiende a cero se desprende que i / ℓ tiende a h. Dividiendo la ecuación (12) entre y_t:

$$\frac{i_t}{y_t} = h\frac{\ell_t}{y_t} - \frac{w_t}{y_t}\frac{e^{\nu h} - 1}{\nu}$$

Por lo tanto, dado que w / y tiende a cero, entonces:

$$\frac{i_t}{y_t} = h\frac{\ell_t}{y_t}$$

$$\frac{i_t}{\ell_t} = h$$

Además, reemplazando z por $n + \delta$ en la ecuación (14), tenemos:

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} + n + \delta = z\frac{\ell_t}{y_t}$$

Sabemos que $\ell_t = \frac{i_t}{h}$ y $i_t = \frac{s}{z} y_t$, entonces:

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} + n + \delta = \frac{z}{y_t}\frac{\frac{s}{z} y_t}{h} = \frac{z}{y_t}\frac{sy_t}{zh} = \frac{s}{h}$$

Por lo tanto, la tasa de crecimiento del producto tiende a:

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} \rightarrow \frac{s}{h} - n - \delta$$

Según la ecuación (19), el ratio i / y permanece constante, por lo tanto, la inversión por trabajador en nuevo equipo debe crecer a la misma tasa a la que crece el producto per cápita, que es igual a γ. Es decir,

$$\frac{\dot{i}_t}{i_t} = \frac{\dot{y}_t}{y_t} = \gamma$$

(20) $\gamma = \frac{s}{h} - n - \delta$

Esta ecuación implica que la «tasa natural» (que aquí es igual a $\gamma + n + \delta$), en términos de Harrod, debe igualar a la «tasa garantizada» cuando el salario es cero y los beneficios representan la totalidad del producto (s / h), donde h es igual a i / ℓ.

Siguiendo este análisis, es sencillo demostrar que, en el largo plazo, el producto per cápita no puede crecer a una tasa mayor a $(s / h) - n - \delta$.

De la ecuación (5), tenemos:

$$\frac{I_t}{Y_t} = sb_t$$

Dividiendo ambos lados entre z:

$$\frac{I_t}{Y_t}\frac{L_t}{\lambda_t} = \frac{s}{z}b_t$$

$$\frac{i_t}{y_t} = \frac{s}{z}b_t$$

Dado que b_t, es la proporción que representan los beneficios en el ingreso total, solo adopta valores entre cero y uno. De este modo, en el caso extremo, b_t será igual a uno, por lo tanto, es claro que i / y no puede exceder el ratio s / z.

Asimismo, en la ecuación (12), considerando que la participación de los salarios en el producto es cero, tenemos:

$$\frac{\ell_t}{y_t} = \frac{1}{h}\frac{i_t}{y_t} = \frac{1}{h}\frac{s}{z}$$

Reemplazando este resultado en la ecuación (14), tenemos:

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} + n + \delta \leq z\frac{s}{hz}$$

$$\frac{\dot{y}_t}{y_t} + n + \delta \leq \frac{s}{h}$$

Por lo tanto, no puede haber equilibrio con crecimiento estable a menos que:

$$\gamma \leq \frac{s}{h} - n - \delta$$

Por lo general, esta desigualdad será cumplida, pues el ratio s / h será lo suficientemente elevado, especialmente porque h será pequeña cuando la tasa de crecimiento es alta. Cuando la tasa de crecimiento es alta, el período necesario para que los inversionistas recuperen su inversión será muy corto. Si no se cumpliera esta desigualdad, los salarios disminuirían hasta su nivel mínimo y los planes de inversión de los empresarios estarían por debajo de la inversión que las perspectivas justificarían (Kaldor & Mirrlees 1962: 183).

***Planteamiento del sistema de ecuaciones en** i / y, w / y **y** ℓ / y*

Por todo lo visto, es claro que el crecimiento en el estado estacionario implica $\eta = \gamma$, y por tanto, T es constante en el tiempo. Entonces, la ecuación (18) se convierte en:

$$z_t = n + \delta + z_{t-T}\, e^{-(n+\delta)T}$$

En el estado estacionario, z tiende a su valor de equilibrio: $z_t = z_{t-T} = z$.

$$z = n + \delta + z e^{-(n+\delta)T}$$

Por lo tanto, el nivel de z de equilibrio será igual a:

(21) $z = \dfrac{n+\delta}{1 - e^{-(n+\delta)T}}$

Recordemos que el producto de la economía se divide en salarios y beneficios. De acuerdo con la ecuación (5), tenemos:

$$Y_t = B_t + W_t \quad \rightarrow \quad Y_t = b_t Y_t + W_t \quad \rightarrow \quad Y_t = \frac{1}{s}\frac{I_t}{Y_t} Y_t + W_t$$

En términos per cápita, se obtiene:

$$y_t = b_t y_t + w_t \quad \rightarrow \quad y_t = \frac{z}{s}\frac{i_t}{y_t} y_t + w_t$$

$$y_t = w_t + \frac{z}{s} i_t$$

Dado que z está constante y que y_t crece a la tasa constante γ, dividiendo esta ecuación entre y, y reordenando los términos tenemos:

(22) $\dfrac{z}{s}\dfrac{i}{y} + \dfrac{w}{y} = 1$

En equilibrio, las expectativas de los inversionistas son satisfechas, de modo que $w^*_t = w_t$. Dado que $w_t = w_0 e^{\eta t} = w_0 e^{\gamma t}$, la integral en la ecuación (4) y por ende la ecuación (12) se expresa como:

$$i_t = h\ell_t - w_t \frac{e^{\gamma h} - 1}{\gamma}$$

Al dividir esta expresión entre $h\, y$, se obtiene:

(23) $\frac{1}{h}\frac{i}{y} + \frac{e^{\gamma h} - 1}{\gamma h}\frac{w}{y} - \frac{\ell}{y} = 0$

La ecuación (14) ahora puede presentarse como:

$$\gamma + n + \delta = z\frac{\ell}{y} - \left(z - n - \delta\right)\frac{w}{y}$$

(24) $(z - n - \delta)\frac{w}{y} - z\frac{\ell}{y} = -(\gamma + n + \delta)$

Las ecuaciones (22), (23) y (24) conforman un sistema de ecuaciones simultáneas en i / y, w / y y ℓ / y, valores constantes en el estado estacionario.

Resolución del sistema

(22) $\frac{z}{s}\frac{i}{y} + \frac{w}{y} = 1$

(23) $\frac{1}{h}\frac{i}{y} + \frac{e^{\gamma h} - 1}{\gamma h}\frac{w}{y} - \frac{\ell}{y} = 0$

(24) $(z - n - \delta)\frac{w}{y} - z\frac{\ell}{y} = -(\gamma + n + \delta)$

De (22) tenemos:

(22’) $\frac{i}{y} = \frac{s}{z}(1 - \frac{w}{y})$

De (24) se obtiene:

(24’) $\frac{\ell}{y} = \frac{1}{z}\left[(z - n - \delta)\frac{w}{y} + (\gamma + n + \delta)\right]$

Reemplazando en (23) los valores de i / y y ℓ / y recién hallados, se obtiene:

$$\frac{1}{h}\frac{s}{z}(1 - \frac{w}{y}) + \frac{e^{\gamma h} - 1}{\gamma h}\frac{w}{y} - \frac{1}{z}\left[(z - n - \delta)\frac{w}{y} + (\gamma + n + \delta)\right] = 0$$

Sacamos denominador común: $h\,z\,\gamma$

$$\gamma\, s\left(1-\frac{w}{y}\right)+z\left(e^{\gamma h}-1\right)\frac{w}{y}-h\,\gamma\left[(z-n-\delta)\frac{w}{y}+(\gamma+n+\delta)\right]=0$$

$$\frac{w}{y}\left[-\gamma\, s+z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma\,(z-n-\delta)\right]=-\gamma\, s+h\gamma\,(\gamma+n+\delta)$$

Así obtenemos el valor de w/y, en función de los parámetros *s, h, δ, γ*:

$$\frac{w}{y}=\frac{-\gamma\, s+h\gamma\,(\gamma+n+\delta)}{-\gamma\, s+z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma(z-n-\delta)}$$

Se obtienen los valores para i/y y ℓ/y:

$$\frac{i}{y}=\frac{s}{z}\left[1-\left(\frac{-\gamma\, s+h\gamma(\gamma+n+\delta)}{-\gamma\, s+z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma(z-n-\delta)}\right)\right]$$

$$\frac{i}{y}=\frac{s}{z}\left[\frac{-\gamma\, s+z\,(e^{\gamma h}-1)-h\gamma\,(z-n-\delta)+\gamma\, s-h\gamma(\gamma+n+\delta)}{-\gamma\, s+z\,(e^{\gamma h}-1)-h\gamma\,(z-n-\delta)}\right]$$

$$\frac{i}{y}=\frac{s}{z}\left[\frac{z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma(z+\gamma)}{-\gamma s+z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma(z-n-\delta)}\right]$$

$$\frac{\ell}{y}=\frac{1}{z}\left[(z-\lambda-\delta)\frac{-\gamma s+h\gamma(\gamma+\lambda+\delta)}{-\gamma s+z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma\,(z-\lambda-\delta)}+(\gamma+\lambda+\delta)\right]$$

La duración económica del capital de equilibrio

Recordando que el progreso técnico crece a una tasa constante e igual a *γ*, se tiene que:

$$\ell_t=\ell_0 e^{\gamma t} \quad \text{y} \quad \ell_{t-T}=\ell_0 e^{\gamma(t-T)}$$

Por lo tanto:

$$\ell_{t-T}=\ell_0 e^{\gamma t}e^{-\gamma T}$$

$$\ell_{t-T}=\ell_t e^{-\gamma T}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (9), tenemos:

$$w_t=\ell_t e^{-\gamma T}$$

$$\frac{\ell_t}{w_t}=e^{\gamma T}$$

De este modo, se halla una ecuación para *T*:

(25) $e^{\gamma T} = \dfrac{\ell}{w} = \dfrac{\ell / y}{w / y}$

Se reemplazarán los valores de ℓ / y y w / y hallados anteriormente en esta última ecuación. Para ello, dividimos la ecuación (24') entre w / y :

$$\frac{\ell / y}{w / y} = \frac{1}{z}\left[(z-n-\delta)\frac{w/y}{w/y} + (\gamma+n+\delta)\frac{1}{w/y}\right]$$

$$\frac{\ell / y}{w / y} = \frac{(z-n-\delta)}{z} + \frac{(\gamma+n+\delta)}{z}\left(\frac{w}{y}\right)^{-1}$$

$$\left(\frac{w}{y}\right)^{-1} = \frac{-\gamma s + z(e^{\gamma h}-1) - h\gamma(z-n-\delta)}{-\gamma s + h\gamma(\gamma+n+\delta)}$$

$$\frac{\ell / y}{w / y} = \frac{(z-n-\delta)}{z} + \frac{(\gamma+n+\delta)}{z}\left(\frac{-\gamma s + z(e^{\gamma h}-1) - h\gamma(z-n-\delta)}{-\gamma s + h\gamma(\gamma+n+\delta)}\right)$$

$$e^{\gamma T} = \frac{\ell / y}{w / y} = \frac{(z-n-\delta)}{z} + \frac{(\gamma+n+\delta)}{z}\left(\frac{-\gamma s + z(e^{\gamma h}-1) - h\gamma(z-n-\delta)}{-\gamma s + h\gamma(\gamma+n+\delta)}\right)$$

Dividiendo el numerador y el denominador del término entre paréntesis entre $h\,\gamma$, tenemos:

$$e^{\gamma T} = \frac{(z-n-\delta)}{z} + \frac{(\gamma+n+\delta)}{z}\left(\frac{-\dfrac{s}{h} + \dfrac{z(e^{\gamma h}-1)}{h\gamma} - (z-n-\delta)}{-\dfrac{s}{h} + (\gamma+n+\delta)}\right)$$

Asimismo, multiplicando el numerador y el denominador del término entre paréntesis por $-h/s$, tenemos:

$$e^{\gamma T} = \frac{(z-n-\delta)}{z} + \frac{(\gamma+n+\delta)}{z}\left(\frac{1 + \dfrac{z}{s}\dfrac{(e^{\gamma h}-1)}{\gamma} + \dfrac{h}{s}(z-n-\delta)}{1 - \dfrac{h}{s}(\gamma+n+\delta)}\right)$$

$$e^{\gamma T} = \frac{(z-n-\delta)}{z} + \frac{(\gamma+n+\delta)}{z}\left(\frac{1 + \dfrac{z}{s\gamma}(e^{\gamma h}-1) + \dfrac{h}{s}(z-n-\delta)}{1 - \dfrac{h}{s}(\gamma+n+\delta)}\right)$$

$$e^{\gamma T} = \frac{1}{z}\left[\frac{(z-n-\delta)\left(1-\frac{h}{s}(\gamma+n+\delta)\right)+(\gamma+n+\delta)\left(1+\frac{z}{s\gamma}(e^{\gamma h}-1)+\frac{h}{s}(z-n-\delta)\right)}{1-\frac{h}{s}(\gamma+n+\delta)}\right]$$

$$e^{\gamma T} = \frac{1}{z}\left[\frac{z+\gamma-\frac{z}{s\gamma}(e^{\gamma h}-1)(\gamma+n+\delta)}{1-\frac{h}{s}(\gamma+n+\delta)}\right]$$

Dividiendo el numerador y el denominador por z, tenemos:

$$e^{\gamma T} = \frac{1+\frac{\gamma}{z}-\frac{1}{s\gamma}(e^{\gamma h}-1)(\gamma+n+\delta)}{1-\frac{h}{s}(\gamma+n+\delta)}$$

Multiplicamos y dividimos el tercer término del numerador por h y, reordenando los términos, obtenemos:

$$(26)\quad e^{\gamma T} = \frac{1-\frac{h(\gamma+n+\delta)}{s}\frac{(e^{\gamma h}-1)}{\gamma h}+\frac{\gamma}{z}}{1-\frac{h(\gamma+n+\delta)}{s}}$$

Dado que $e^{\gamma T}$ se puede expresar como $e^{\gamma T} = \left[e^{-(n+\delta)T}\right]^{-\frac{\gamma}{n+\delta}}$, la ecuación (20) se reordena de la siguiente forma:

$$z = \frac{n+\delta}{1-e^{-(n+\delta)T}} = 1-e^{-(n+\delta)T} = \frac{n+\delta}{z}$$

$$e^{-(n+\delta)T} = 1-\frac{n+\delta}{z}$$

$$\left[e^{-(n+\delta)T}\right]^{-\frac{\gamma}{(n+\delta)}} = \left[1-\frac{n+\delta}{z}\right]^{-\frac{\gamma}{(n+\delta)}}$$

$$(27)\quad e^{\gamma T} = \left[1-\frac{n+\delta}{z}\right]^{-\frac{\gamma}{n+\delta}}$$

Las ecuaciones (26) y (27) permiten determinar los valores de T y z simultáneamente. Si bien las expresiones algebraicas de las ecuaciones son complejas, una vez que se conocen los valores de los parámetros n, δ, h, s y γ, los valores de equilibrio se hallan sin mayor dificultad. La tasa de crecimiento estable γ es determinada por la función de progreso técnico. La existencia de un único equilibrio puede demostrarse siguiendo el apéndice del artículo de Kaldor y Mirrlees (1962: 190-192). Luego de calcular los valores de T y z, la solución de las ecuaciones (24) y (25) permite hallar valores para w/y y ℓ/y. Luego, de la ecuación (23), se halla i/y.

Un caso especial

La ecuación (21) no es válida cuando $n + \delta = 0$. En este caso, si $n + \delta = 0$, debemos volver a la ecuación (6). De la ecuación (10) sabemos que la fuerza laboral crece a la tasa n, por lo tanto, asumimos que el grupo λ_t también crece a la misma tasa, así obtenemos:

$$L_t = \int_{t-T}^{t} \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d\tau \quad \rightarrow \quad L_t = \int_{t-T}^{t} \lambda_0 e^{n\tau} e^{-\delta t} e^{d\tau} d\tau$$

$$L_t = \lambda_0 e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} e^{(n+\delta)\tau} d\tau$$

Dado que $n + \delta = 0$, tenemos:

$$L_t = \lambda_0 e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} d\tau$$

Integrando:

$$L_t = \lambda_0 e^{-\delta t} [\tau]_{t-T}^{t} = \lambda_0 e^{-\delta t} (t - t + T)$$

$$L_t = \lambda_0 e^{-\delta t} T$$

Además, dado que $\lambda_t = \lambda_0 e^{-\delta t}$, reemplazamos:

$$L_t = \lambda_t T$$

Recordamos la definición de z:

$$1 = \frac{\lambda_t}{L_t} T = zT$$

(28) $zT = 1$

Esta expresión reemplaza a la ecuación (27) en el caso en que $n + \delta = 0$. Utilizando la ecuación (26) y la ecuación (28) se hallan los valores para T y z. Una vez hallados estos valores, la solución de la ecuación (24) y (25) permite hallar los valores de equilibrio de w/y y ℓ/y. Utilizando estos resultados y la ecuación (23), se halla i/y.

Consideraciones sobre el stock *de capital agregado*

Si el *stock* de capital agregado pudiera ser valuado al costo histórico, sin permitir disminuciones en el valor debido a la obsolescencia, tendríamos que:

$$K_t = \int_{t-T}^{t} i_\tau \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d\tau$$

Y por lo tanto, el producto sería:

$$(29)\ Y_t = \int_{t-T}^{t} \ell_\tau \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d\tau$$

Sabemos que la inversión per cápita en capital de la última generación, i_τ, al igual que la productividad por trabajador empleado en el capital de última generación, ℓ_τ, crecen a la tasa γ. Además asumimos que la población empleada en la operación del capital de última generación crece a la misma tasa a la que crece el conjunto de la fuerza laboral, n. Por lo tanto, tenemos:

$$i_t = i_0 e^{\gamma t} \qquad \ell_t = \ell_0 e^{\gamma t} \qquad \lambda_t = \lambda_0 e^{nt}$$

$$i_\tau = i_0 e^{\gamma \tau} \qquad \ell_\tau = \ell_0 e^{\gamma \tau} \qquad \lambda_\tau = \lambda_0 e^{n\tau}$$

Reemplazando estos valores en la ecuación del *stock* de capital y del producto, tenemos:

$$K_t = \int_{t-T}^{t} i_0 e^{\gamma\tau} \lambda_0 e^{n\tau} e^{-\delta t} e^{\delta\tau} d\tau \qquad Y_t = \int_{t-T}^{t} \ell_0 e^{\gamma\tau} \lambda_0 e^{n\tau} e^{-\delta t} e^{\delta\tau} d\tau$$

$$K_t = i_0 \lambda_0 e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} e^{(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau \qquad Y_t = \ell_0 \lambda_0 e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} e^{(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau$$

Formamos el ratio capital–producto:

$$\frac{K_t}{Y_t} = \frac{i_0 \lambda_0 e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} e^{(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau}{\ell_0 \lambda_0 e^{-\delta t} \int_{t-T}^{t} e^{(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau}$$

$$\frac{K_t}{Y_t} = \frac{i_0}{\ell_0} \frac{e^{\gamma t}}{e^{\gamma t}} = \frac{i_t}{\ell_t}$$

De esta forma, el ratio capital–producto agregado sería constante e igual a:

$$\frac{K}{Y}=\frac{i}{\ell}$$

Sin embargo, cuando se prevé la obsolescencia, el conocimiento de la participación de los beneficios b y de los costos históricos del capital invertido (ecuación 29) no nos permiten calcular ni los beneficios netos, ni la tasa de beneficio del capital. El valor del capital en cualquier momento del tiempo será inferior a K_t debido a la provisión acumulada de obsolescencia y la provisión de obsolescencia adecuada no puede ser calculada sin conocer el capital sobre el que se obtiene el beneficio, que a su vez no puede ser conocido sin conocer antes la tasa de beneficio.

Determinación de la tasa general de ganancia o de beneficios de los activos fijos de la economía

En el equilibrio de *golden age*, se cumple que las expectativas son satisfechas, por lo que el beneficio esperado de la inversión en nuevo equipo es igual al beneficio efectivamente percibido. Se cumple además que la tasa de beneficio de la inversión en todas las generaciones de capital es la misma. Por lo tanto, la ecuación (3) se reemplaza por la igualdad y es una ecuación adicional que sirve para la determinación de ϕ, la tasa general de ganancia o beneficio, tomando en cuenta que i_t, ℓ_t, w_t y T están determinados por las otras ecuaciones del sistema.

(3') $i_t = \int_0^T e^{-(\phi+\delta)\tau}(\ell_t - w_{t+\tau})d\tau$

Dado que ϕ es constante, tenemos:

(30) $\gamma + n = \phi\omega$

Donde ω es la proporción de beneficios netos ahorrada. De este modo, el valor del capital en términos de producto crece a la tasa de crecimiento de equilibrio $\gamma + n$. Y ϕ, según la ecuación (3'), es el ratio de beneficios netos sobre el *stock* de capital. En general, ω depende de ϕ y se calcula mejor a partir de la ecuación (30). Pero en el caso particular en el que $s = 1$, es decir cuando todos los beneficios se invierten, ω también deberá ser igual a 1, y así la tasa de ganancia será igual a la tasa de crecimiento del producto: $\phi = \gamma + n$.

Asimismo, puede demostrarse que ese valor de $\phi = \gamma + n$ satisface la ecuación (30). Para ello, partimos de la ecuación que presenta el producto total como:

$$Y_t = \int_{t-T}^{t} \ell_\tau \lambda_\tau e^{-\delta(t-\tau)} d \qquad \rightarrow \qquad Y_t = \int_0^T \ell_{t-\tau} \lambda_{t-\tau} e^{-\delta\tau} d\tau$$

Recordemos que el progreso técnico crece a una tasa constante e igual a γ, por su parte, la población crece a una tasa constante e igual a n. Por lo tanto tenemos:

$$\ell_t = \ell_0 e^{\gamma t} \qquad \lambda_t = \lambda_0 e^{nt}$$

$$\ell_{t-\tau} = \ell_0 e^{\gamma(t-\tau)} \qquad \lambda_{t-\tau} = \lambda_0 e^{n(t-\tau)}$$

$$\ell_{t-\tau} = \ell_0 e^{\gamma t} e^{-\gamma\tau} \qquad \lambda_{t-\tau} = \lambda_0 e^{nt} e^{-n\tau}$$

$$\ell_{t-\tau} = \ell_t\, e^{-\gamma\tau} \qquad \lambda_{t-\tau} = \lambda_t\, e^{-n\tau}$$

Resolución matemática: cambio de variable

Realizamos un cambio de variable:

Nueva variable:	$x = t-\tau \quad \rightarrow \quad \tau = t - x$ $d\tau = -dx$
Nuevo límite inferior:	$\tau = t - T \quad \rightarrow \quad x = T$
Nuevo límite superior:	$\tau = t \quad \rightarrow \quad x = 0$

$$Y_t = \int_T^0 \ell_{t-x} \lambda_{t-x} e^{-\delta x} (-dx)$$

Por teoría de cálculo integral, sabemos que: $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$

Por lo tanto, tenemos: $Y_t = \int_0^T \ell_{t-x} \lambda_{t-x} e^{-\delta x} dx$

Reemplazando x por τ, finalmente obtenemos: $Y_t = \int_0^T \ell_{t-\tau} \lambda_{t-\tau} e^{-\delta\tau} d\tau$

Reemplazando estos valores en la ecuación del producto se obtiene:

$$Y_t = \int_0^T \ell_t\, e^{-\gamma\tau} \lambda_t\, e^{-n\tau} e^{-\delta\tau} d\tau$$

$$Y_t = \ell_t \lambda_t \int_0^T e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau$$

Dividiendo esta ecuación entre L_t:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{1}{L_t}\ell_t \lambda_t \int_0^T e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau$$

$$y_t = \ell_t z \int_0^T e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau$$

$$\frac{y_t}{z} = \ell_t \int_0^T e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau$$

Al incluir $\phi = \gamma + n$ en el lado derecho de la ecuación (3') tenemos:

$$i_t = \int_0^T e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} (\ell_t - w_{t+\tau}) d\tau$$

Reemplazamos $w_{t+\tau} = w_0 e^{\gamma(t+\tau)}$ en esta ecuación:

$$\int_0^T e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} (\ell_t - w_0 e^{\gamma(t+\tau)}) d\tau$$

$$i_t = \int_0^T \ell_t e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau - \int_0^T w_0 e^{\gamma(t+\tau)} e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau$$

Sabemos que $w_t = w_0 e^{\gamma t}$, por lo tanto,

$$i_t = \ell_t \int_0^T e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau - w_t \int_0^T e^{-(n+\delta)\tau} d\tau$$

Combinando esta última ecuación con la ecuación del producto:

$$Y_t = \ell_t \lambda_t \int_0^T e^{-(\gamma+n+\delta)\tau} d\tau$$

Tenemos:

$$i_t = \frac{Y_t}{\lambda_t} - w_t \int_0^T e^{-(n+\delta)\tau} d\tau$$

Multiplicando el numerador y el denominador del primer término del lado derecho, se obtiene:

$$i_t = \frac{Y_t}{\lambda_t}\frac{L_t}{L_t} - w_t \int_0^T e^{-(n+\delta)\tau} d\tau$$

$$i_t = \frac{y_t}{z_t} - w_t \int_0^T e^{-(n+\delta)\tau} d\tau$$

Resolución matemática: la integral de una función exponencial

Integramos $\int_0^T e^{-(n+\delta)\tau} d\tau$

Por teoría de cálculo, tenemos: $\int e^{ax} dx = \frac{e^{ax}}{a} + c$

Por lo tanto: $\left.\frac{e^{-(n+\delta)}}{-(n+\delta)}\right|_0^T = \frac{1}{-(n+\delta)}\left[e^{-(n+\delta)T} - 1\right] = \frac{1-e^{-(n+\delta)T}}{n+\delta}$

La última integral, es igual a $\frac{1-e^{-(n+\delta)T}}{n+\delta}$. Por la ecuación (21), sabemos que esta expresión es igual a la inversa de z.

Por lo tanto, como señala la ecuación (22), cuando $s = 1$ la tasa de beneficio (ϕ) es igual a la tasa de crecimiento del producto ($\gamma + n$), i_t es igual a:

$$i_t = \frac{y_t - w_t}{z_t}$$

Si $s \neq 1$, entonces $\phi \neq \gamma + n$, por lo que debemos calcular ϕ de la ecuación (3'). Integrando, dado que ℓ y w están creciendo de manera exponencial, se obtiene la siguiente relación:

$$\int_0^T e^{-(\phi+\delta)\tau}(\ell_t - w_{t+\tau})d\tau$$

$$i_t = \ell_t \int_0^T e^{-(\phi+\delta)\tau} d\tau - \int_0^T w_{t+\tau} e^{-(\phi+\delta)\tau} d\tau$$

Realizando un procedimiento similar al desarrollado cuando $s = 1$, tenemos:

$$w_{t+\tau} = w_0 e^{-\gamma(t+\tau)} = w_t e^{-\gamma\tau}$$

$$i_t = \ell_t \int_0^T e^{-(\phi+\delta)\tau} d\tau - w_t \int_0^T e^{-(\phi+\delta-\gamma)\tau} d\tau$$

$$i_t = \ell_t \left[\frac{e^{-(\phi+\delta)\tau}}{-(\phi+\delta)}\right]_0^T - w_t \left[\frac{e^{-(\phi+\delta-\gamma)\tau}}{-(\phi+\delta-\gamma)}\right]_0^T$$

$$i_t = \frac{\ell_t}{-(\phi+\delta)}\left[e^{-(\phi+\delta)T} - 1\right] + \frac{w_t}{\phi+\delta-\gamma}\left[e^{-(\phi+\delta-\gamma)T} - 1\right]$$

$$i_t = \frac{\ell_t}{\phi+\delta}\left[1 - e^{-(\phi+\delta)T}\right] - \frac{w_t}{\phi+\delta-\gamma}\left[1 - e^{-(\phi+\delta-\gamma)T}\right]$$

Dividiendo entre el producto, se obtiene:

$$(31)\quad \frac{i_t}{y_t} = \frac{1-e^{-(\phi+\delta)T}}{\phi+\delta}\frac{\ell_t}{y_t} - \frac{1-e^{-(\phi+\delta-\gamma)T}}{\phi+\delta-\gamma}\frac{w_t}{y_t}$$

Fuera del *golden age*, no existe una tasa de beneficio, salvo en el sentido de una tasa supuesta de beneficio basada en una mezcla de convención y creencia, que permite a los empresarios decidir si un determinado proyecto pasa la prueba de rentabilidad adecuada.

Demostración de la existencia de un único equilibrio

Para demostrar la existencia de un único equilibrio, los autores utilizan el análisis gráfico. Las ecuaciones (26) y (27) pueden representarse en un diagrama en el plano ($1/r$, $e^{\gamma T}$). La ecuación (26) es una ecuación lineal de $e^{\gamma T}$ en función de $1/r$. Simplificando los términos en la ecuación (26) se obtiene:

$$e^{\gamma T} = \frac{1-AB}{1-A} + \frac{\gamma}{1-A}\frac{1}{z} \qquad \text{Recta } AA'$$

Donde $A = \dfrac{h(\gamma+n+\delta)}{s}$ y $B = \dfrac{(e^{\gamma h}-1)}{\gamma h}$ y , además, $0 < A < 1$ y $B > 0$.

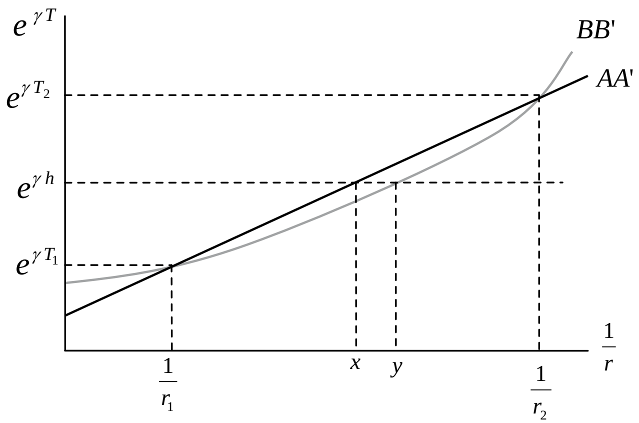
Esta ecuación es representada en el plano ($1/r$, $e^{\gamma T}$) como una recta cuyo intercepto es igual a $(1-AB)/(1-A)$ y con pendiente positiva igual a $\gamma/(1-A)$. Esta recta recibe el nombre de AA' (véase gráfico 3.12).

Simplificando los términos de la ecuación (27), se obtiene:

$$e^{\gamma T} = \left[1 - C\frac{1}{z}\right]^{-\frac{\gamma}{C}} \qquad \text{Curva } BB'$$

Donde $C = n + \delta > 0$. La ecuación (27) es una curva de pendiente positiva representada por la curva BB'.

Gráfico 3.12
Demostración de la existencia de un único equilibrio



Fuente: Kaldor & Mirrlees (1962: 191).

En la curva *BB*', cuando $1 / r$ es cero, $e^{\gamma T}$ es igual a 1.

$$e^{\gamma T} = \left[1 - C(0)\right]^{-\frac{\gamma}{C}} = 1$$

Por lo tanto, el intercepto de la curva *BB*' es mayor que el intercepto de la recta *AA*'. Los autores demuestran en el apéndice de su artículo que la curva *BB*' corta a la recta *AA*' en dos puntos. Estos puntos están representados en el gráfico 3.12 por $(1 / r_1, e^{\gamma T_1})$ y $(1 / r_2, e^{\gamma T_2})$. Para demostrarlo, se debe probar que existen puntos en los cuales la curva *BB*' está por encima de la recta *AA*' como también puntos en los que la curva se halla por debajo de la recta.

Sea *x* el valor de $1 / r$ del punto que corresponde a $T = h$ en la recta *AA*':

(i) $e^{\gamma h} = \dfrac{1 - AB}{1 - A} + \dfrac{\gamma}{1 - A} x$

Sea *y* el valor de $1 / r$ del punto que corresponde a $T = h$ en la recta *BB*':

(ii) $e^{\gamma h} = \left[1 - C\, y\right]^{-\frac{\gamma}{C}}$

En la ecuación (i), se tiene:

$$(1 - A) e^{\gamma h} = 1 - AB + \gamma\, x$$
$$\gamma\, x = (1 - A) e^{\gamma h} - 1 + AB$$
$$\gamma\, x = e^{\gamma h} - A e^{\gamma h} - 1 + AB$$
$$\gamma\, x = e^{\gamma h} - 1 - A(e^{\gamma h} - B)$$

Reemplazando B por su valor: $B=\dfrac{(e^{\gamma h}-1)}{\gamma h}$, se obtiene:

$$\gamma\, x = e^{\gamma h} - 1 - A\left[e^{\gamma h} - \frac{(e^{\gamma h}-1)}{\gamma h}\right]$$

$$\gamma\, x = e^{\gamma h} - 1 - \frac{A}{\gamma h}\left[e^{\gamma h}(\gamma h) - (e^{\gamma h}-1)\right]$$

$$\gamma\, x = e^{\gamma h} - 1 - \frac{A}{\gamma h}\left[e^{\gamma h}(\gamma h - 1) + 1\right]$$

Resolución matemática: Series de Taylor

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad |x| < \infty$$

Utilizando la serie de Taylor para $e^{\gamma h}$, se obtiene:

$$\gamma\, x = \left(1 + \gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \ldots\right) - 1 - \frac{A}{\gamma h}\left[\left(1 + \gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \ldots\right)(\gamma h - 1) + 1\right]$$

$$\gamma\, x = \left(\gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \ldots\right) - \frac{A}{\gamma h}\left[\left(\gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \ldots\right)(\gamma h - 1) + \gamma h - 1 + 1\right]$$

$$\gamma\, x = \left(\gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \ldots\right) - \frac{A}{\gamma h}\left[\gamma h\left(\gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \ldots\right) - \left(\gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \ldots\right) + \gamma h\right]$$

$$\gamma\, x = \left(\gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \frac{(\gamma h)^3}{3!} + \ldots\right)$$
$$- \frac{A}{\gamma h}\left[\left((\gamma h)^2 + \frac{(\gamma h)^3}{2!} + \frac{(\gamma h)^4}{3!} + \ldots\right) - \left(\gamma h + \frac{(\gamma h)^2}{2!} + \frac{(\gamma h)^3}{3!} + \ldots\right) + \gamma h\right]$$

$$\gamma\ x=\left(\gamma\ h+\frac{(\gamma\ h)^2}{2!}+\frac{(\gamma\ h)^3}{3!}+\ldots\right)-\frac{A}{\gamma\ h}\left[\left((\gamma\ h)^2+\frac{(\gamma\ h)^3}{2!}+\frac{(\gamma\ h)^4}{3!}+\ldots\right)-\left(\frac{(\gamma\ h)^2}{2!}+\frac{(\gamma\ h)^3}{3!}+\ldots\right)\right]$$

$$\gamma\ x=\left(\gamma\ h+\frac{(\gamma\ h)^2}{2!}+\frac{(\gamma\ h)^3}{3!}+\ldots\right)-\frac{A}{\gamma\ h}\left[\left(1-\frac{1}{2!}\right)(\gamma\ h)^2+\left(\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}\right)(\gamma\ h)^3+\left(\frac{1}{3!}-\frac{1}{4!}\right)(\gamma\ h)^4+\ldots\right]$$

$$\gamma\ x=\left(\gamma\ h+\frac{(\gamma\ h)^2}{2!}+\frac{(\gamma\ h)^3}{3!}+\ldots\right)-\frac{A}{\gamma\ h}\left[\left(\frac{1}{2!}\right)(\gamma\ h)^2+\left(\frac{2}{3!}\right)(\gamma\ h)^3+\left(\frac{3}{4!}\right)(\gamma\ h)^4+\ldots\right]$$

$$\gamma\ x=\gamma\ h+\left(1-\frac{A}{\gamma\ h}\right)\frac{(\gamma\ h)^2}{2!}+\left(1-2\frac{A}{\gamma\ h}\right)\frac{(\gamma\ h)^3}{3!}+\left(1-3\frac{A}{\gamma\ h}\right)\frac{(\gamma\ h)^4}{4!}+\ldots$$

Los términos entre paréntesis son negativos pues, $\gamma + n + \delta > \gamma\ s$, porque $s \leq 1$, $n > 0$ y $\delta > 0$:

$$A=\frac{h(\gamma+n+\delta)}{s}\qquad\rightarrow\qquad\frac{A}{\gamma\ h}=\frac{(\gamma+n+\delta)}{\gamma\ s}$$

Por lo tanto, $A / \gamma\ h > 1$:

$$\frac{A}{\gamma\ h}=\frac{(\gamma+n+\delta)}{\gamma\ s}>1$$

Por lo tanto,

$$\gamma\ x<\gamma\ h+\left(1-\frac{A}{\gamma\ h}\right)\frac{(\gamma\ h)^2}{2!}$$

$$\gamma\ x<\gamma\ h-\left(\frac{A}{\gamma\ h}-1\right)\frac{(\gamma\ h)^2}{2}$$

Reemplazando A por su valor, $A=\dfrac{h(\gamma+n+\delta)}{s}$, se obtiene:

$$\gamma\ x<\gamma\ h-\left(\frac{\frac{h(\gamma+n+\delta)}{s}}{\gamma\ h}-1\right)\frac{(\gamma\ h)^2}{2}$$

$$\gamma\ x<\gamma\ h-\left(\frac{\gamma+n+\delta}{\gamma\ s}-1\right)\frac{(\gamma\ h)^2}{2}$$

$$\gamma\ x<\gamma\ h-\left(\frac{\gamma+n+\delta-\gamma\ s}{\gamma\ s}\right)\frac{(\gamma\ h)^2}{2}$$

(iii) $\gamma\, x < \gamma\, h - \left(\frac{n+\delta+(1-s)\gamma}{s} \right) \frac{\gamma (h)^2}{2}$

Si se cumple la desigualdad (iii), entonces también debe cumplirse que:

$$\gamma\, x < \gamma\, h - (n+\delta) \frac{\gamma (h)^2}{2}$$

Pues, $\frac{n+\delta+(1-s)\gamma}{s} > n+\delta$, ya que $s \leq 1$ y $\gamma > 0$.

$$n + \delta + (1 - s)\, \gamma > s(n + \delta)$$

Reemplazando $C = n + \delta$ en la ecuación (ii)

$$e^{\gamma h} = \left[1 - (n+\delta)\, y \right]^{-\frac{\gamma}{n+\delta}}$$

Despejando $(n + \delta)\, y$, se obtiene:

$$\left(e^{\gamma h} \right)^{-\frac{n+\delta}{\gamma}} = 1 - (n+\delta)\, y$$

$$(n+\delta)\, y = 1 - e^{\gamma h \left(-\frac{n+\delta}{\gamma} \right)}$$

$$(n+\delta)\, y = 1 - e^{-h(n+\delta)}$$

$$y = \frac{1}{(n+\delta)} \left[1 - e^{-h(n+\delta)} \right]$$

Multiplicando ambos lados por γ:

$$\gamma\, y = \frac{\gamma}{(n+\delta)} \left[1 - e^{-h(n+\delta)} \right]$$

Utilizando la serie de Taylor para $e^{-h(n+\delta)}$:

$$\gamma\, y = \frac{\gamma}{(n+\delta)} \left[1 - \left(1 + [-h(n+\delta)] + \frac{[-h(n+\delta)]^2}{2!} + \frac{[-h(n+\delta)]^3}{3!} + \ldots \right) \right]$$

$$\gamma\, y = \frac{\gamma}{(n+\delta)} \left[h(n+\delta) - \frac{[h(n+\delta)]^2}{2!} + \frac{[h(n+\delta)]^3}{3!} - \ldots + \ldots \right]$$

Dado que la serie de Taylor presenta términos positivos y negativos, se puede concluir que:

$$\gamma\, y > \frac{\gamma}{(n+\delta)}\left[h(n+\delta) - \frac{[h(n+\delta)]^2}{2!} \right] = \gamma\, h - (n+\delta)\frac{\gamma(h)^2}{2}$$

Recordando que $\gamma\, x < \gamma\, h - (n+\delta)\frac{\gamma(h)^2}{2}$, esto implica que:

$$\gamma\, y > \gamma\, h - (n+\delta)\frac{\gamma(h)^2}{2} > \gamma\, x$$

Por lo tanto, $\gamma\, y > \gamma\, x$, es decir, $y > x$. Puesto que el intercepto de la recta *AA*' está por debajo de la curva *BB*', pero cuando $T = h$, la recta *AA*' está por encima de la curva *BB*' (pues $y > x$), entonces la recta *AA*' debe haber cortado la curva en algún punto $T < h$ (representado en el gráfico 3.12 por el punto $T_1 < h$). Sin embargo, eventualmente la curva *BB*' volverá a cortar la recta *AA*' en un punto $T > h$ (representado en el gráfico 3.12 por el punto $T_2 > h$). Como se vio en el desarrollo del modelo, la vida útil del *stock* de capital (T) no puede ser menor que h, el tiempo que le toma a los empresarios recuperar su inversión, pues de lo contrario, los empresarios incurrirían en pérdidas. Por lo tanto, el único valor de equilibrio posible para T es $T_2 > h$. De este modo, los autores demuestran que existe una única solución posible para las ecuaciones (26) y (27) en el estado estacionario.

Solución numérica del modelo de Kaldor y Mirrlees

Como se mencionó, las ecuaciones (26) y (27) presentan formas algebraicas complejas; sin embargo, la resolución numérica de los modelos no presenta mayor complicación. Para hallar los valores de z y T en las ecuaciones (26) y (27) asumimos determinados valores para los parámetros γ, $n + \delta$, h y s (Kaldor & Mirrlees 1962: 186). Suponemos entonces que la tasa de crecimiento de la población más la tasa de depreciación es de 2% (es decir, $n + \delta = 0.02$); el producto per cápita, la inversión por trabajador, la productividad y el salario en el estado estacionario crecen a una tasa de 2% ($\gamma = 0.02$); además a los inversionistas les toma 3 años recuperar su inversión ($h = 3$); y la tasa de ahorro es igual a 0.66 ($s = 0.66$). Estos valores serán reemplazados en las ecuaciones (26) y (27), formando un sistema para hallar los valores de z y T.

Valores de los parámetros:

$$n + \delta = 0.02 \quad ; \quad \gamma = 0.02 \quad ; \quad h = 3 \quad ; \quad s = 0.66$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (26), se obtiene:

$$e^{0.02T} = \frac{1-\frac{3(0.04)}{0.66}\frac{(e^{0.06}-1)}{0.06}+\frac{0.02}{z}}{1-\frac{3(0.04)}{0.66}}$$

$$e^{0.02T} = 0.993198+\frac{0.024444}{z} \qquad (26')$$

Reemplazando los valores numéricos de los parámetros en la ecuación (27) se obtiene:

$$e^{0.02T} = \left[1-\frac{0.02}{z}\right]^{-\frac{0.02}{0.02}}$$

$$e^{0.02T} = \left[1-\frac{0.02}{z}\right]^{-1} \qquad (27')$$

Las ecuaciones (26′) y (27′) forman un sistema que determina conjuntamente los valores de *z* y *T*. Igualando ambas expresiones, se obtiene:

$$0.993198+\frac{0.024444}{z} = \left[1-\frac{0.02}{z}\right]^{-1}$$

$$\frac{1}{0.993198+\frac{0.024444}{z}} = 1-\frac{0.02}{z}$$

$$1 = \left[1-\frac{0.02}{z}\right]\left[0.993198+\frac{0.024444}{z}\right]$$

Realizando un cambio de variable, $x=\frac{1}{z}$, la última expresión tiene la forma de una ecuación cuadrática:

$$1 = 0.993198-0.019864x+0.024444x-0.000489x^2$$

$$0.000489x^2-0.00458x+0.006802=0$$

La resolución de esta ecuación de segundo grado proporciona dos raíces positivas:

$$x_1 = 1.850939 \quad ; \quad x_2 = 7.515113$$

Volviendo a las variables originales, se tiene que $x = \frac{1}{z}$, por lo tanto:

$$z_1 = 0.540278 \quad ; \quad z_2 = 0.133065$$

Tomando los valores encontrados y reemplazando en (27′), se halla el valor de T:
Para z_1:

$$e^{0.02T} = \left[1 - \frac{0.02}{0.540278}\right]^{-1} = 1.038441$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación:

$$\ln e^{0.02T} = \ln 1.038441$$

$$0.02T = 0.037721$$

$$T_1 = 1.886028$$

Para z_2:

$$e^{0.02T} = \left[1 - \frac{0.02}{7.515113}\right]^{-1} = 1.176889$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la ecuación:

$$\ln e^{0.02T} = \ln 1.176889$$

$$0.02T = 0.162875$$

$$T_2 = 8.14373$$

De este modo, se obtienen dos soluciones para el sistema de ecuaciones para los valores de los parámetros definidos:

Solución 1: $z_1 = 0.540278$ y $T_1 = 1.886028$

Solución 2: $z_2 = 0.133065$ y $T_2 = 8.14373$

Sin embargo, en el modelo, el tiempo que les toma a los inversionistas recuperar su inversión (h = 3), no puede ser mayor que la duración económica del *stock* de capital (T), pues de ser así, los beneficios serían negativos. Dado que supusimos que h = 3, descartamos la primera solución (z_1, T_1), pues en ella no se cumple la condición $T > h$. La solución (z_2, T_2) es la correcta, pues con ella se cumple que $T > h$. Por lo tanto, para un conjunto de parámetros ($n + \delta = 0.02$; $\gamma = 0.02$; $h = 3$; $s = 0.66$), la duración del *stock* de capital en el estado estacionario es de 8.14 años y el ratio de trabajadores empleados en la fábrica de la última generación sobre la fuerza laboral total empleada es igual a 0.13.

(i) z = 0.133065

(ii) T = 8.14373

A partir de la solución de z y T es posible encontrar valores para w/y, ℓ/y y i/y. De las ecuaciones (22), (23) y (24), se obtiene el valor de w/y, i/y y ℓ/y en función de los parámetros s, h, δ, γ.

$$\frac{w}{y}=\frac{-\gamma s+h\gamma(\gamma+n+\delta)}{-\gamma s+z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma(z-n-\delta)}$$

$$\frac{i}{y}=\frac{s}{z}\left[\frac{z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma(z+\gamma)}{-\gamma s+z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma(z-n-\delta)}\right]$$

$$\frac{\ell}{y}=\frac{1}{z}\left[(z-\lambda-\delta)\frac{-\gamma s+h\gamma(\gamma+\lambda+\delta)}{-\gamma s+z(e^{\gamma h}-1)-h\gamma(z-\lambda-\delta)}+(\gamma+\lambda+\delta)\right]$$

Tomando los valores propuestos para hallar z y T, se obtiene:

(iii) $\dfrac{w}{y}=0.9187$

(iv) $\dfrac{i}{y}=0.403443$

(v) $\dfrac{l}{y}=1.08130$

Una vez hallados los valores para dichos ratios, es posible hallar la participación de los beneficios en el producto, a partir de la ecuación (5):

$$b_t=\frac{z}{s}\frac{i_t}{y_t}$$

(v) b_t = 0.0813

Para hallar el ratio inversión–producto, se divide la ecuación (1) entre la ecuación (1'):

$$i_t=\frac{I_t}{\lambda_t} \quad ; \quad y_t=\frac{Y_t}{L_t}$$

$$\frac{i_t}{y_t}=\frac{I_t/\lambda_t}{Y_t/L_t} \quad \rightarrow \quad \frac{i_t}{y_t}=\frac{I_t}{Y_t}\frac{L_t}{\lambda_t} \quad \rightarrow \quad \frac{i_t}{y_t}=\frac{1}{z}\frac{I_t}{Y_t}$$

Reemplazando los valores de z e i / y, se halla el ratio inversión–producto:

(vii) $\frac{I_t}{Y_t} = 0.0537$

Se sabe que la fuerza laboral crece a una tasa constante e igual a n y se ha supuesto que $n = 0.01$. Para un valor inicial L_0 se tiene que:

(viii) $L_t = L_0 e^{0.01t}$

Por definición, z es el ratio de trabajadores empleados en la fábrica de la generación t (λ_t) sobre la fuerza laboral total empleada (L_t). Por lo tanto, utilizando la ecuación para la fuerza laboral, es posible despejar λ_t, el número de empleados en la fábrica de la generación t.

$$z = \frac{\lambda_t}{L_t} = 0.133$$

$$z = \frac{\lambda_t}{L_0 e^{0.01t}} = 0.133$$

(xi) $\lambda_t = (0.133) L_0 e^{0.01t}$

En el estado estacionario los salarios crecen a la misma tasa que crece la productividad. Es decir, la tasa de crecimiento del salario que habíamos denominado v es igual a γ, además se ha supuesto que $\gamma = 0.02$:

$$w_t = w_0 e^{vt} = w_0 e^{\gamma t}$$

(x) $w_t = w_0 e^{0.02t}$

De la ecuación para la masa salarial (8), hallamos el valor del producto:

(8) $(1 - b_t) Y_t = L_t w_t$

$$(1 - 0.0813) Y_t = \left(L_0 e^{0.01t} \right) \left(w_0 e^{0.02t} \right)$$

(xi) $Y_t = (1.088) w_0 L_0 e^{(0.03)t}$

Del valor hallado para el ratio inversión-producto, I_t / Y_t, ecuación (vii), se despeja el valor de I_t:

$$I_t = (0.0537)\ Y_t$$

$$I_t = 0.05365 \left[\frac{1}{0.9187} w_0 L_0 e^{(0.03)t} \right]$$

(xii) $I_t = 0.058398\, w_0 L_0 e^{(0.03)t}$

Reemplazando los valores de I_t y λ_t, ecuaciones (ix) y (xii) en la ecuación (1), se obtiene la inversión por trabajador en capital de la generación *t*:

(1) $i = \dfrac{I_t}{\lambda_t}$

$$i = \frac{I_t}{\lambda_t} = \frac{0.058398\, w_0 L_0 e^{(0.03)t}}{0.133 L_0 e^{0.01t}}$$

(xiii) $i_t = 0.439081\, w_0 e^{0.02t}$

Utilizando las ecuaciones (viii) y (xi), se obtiene el producto por trabajador:

$$\frac{Y_t}{L_t} = \frac{(1.088)\, w_0 L_0 e^{(0.03)t}}{L_0 e^{0.01t}}$$

(xiv) $y_t = (1.088)\, w_0 e^{0.02t}$

De la ecuación (4), se puede despejar el valor de la productividad. En el modelo, se asume que la condición de la ecuación (4) debe cumplirse con la igualdad (Kaldor & Mirrlees 1962: 178), pues de esta forma los inversionistas se protegen de la incertidumbre cuando existe obsolescencia. La igualdad de la ecuación (4) implica que el beneficio obtenido durante los primeros *h* años de operación del capital de generación *t* debe ser igual al gasto de inversión en esa generación.

(4) $i_t = \displaystyle\int_t^{t+h} (\ell_t - w_\tau^e)\, d\tau$

Resolviendo la integral:

$$i_t = \int_t^{t+h} \ell_t\, d\tau - \int_t^{t+h} w_\tau^e\, d\tau$$

$$i_t = \ell_t h - \int_t^{t+h} w_\tau^e\, d\tau$$

Diferenciando con respecto al tiempo, y aplicando el teorema fundamental del cálculo:

$$\dot{i}_t = \dot{\ell}_t h - (w_{t+h}^e - w_t^e)$$

En el estado estacionario, la inversión por trabajador crece a una tasa de 2%, por lo tanto, la variación en la inversión por trabajador es igual a (0.02) i_t. Por lo tanto:

$$(0.02)i_t = \dot{\ell}_t h - (w^e_{t+h} - w^e_t)$$

Reemplazando, i_t y w^e_t por sus valores de las ecuaciones (xii) y (x), respectivamente, se obtiene:

$$0.02\left[(0.439081)\, w_0\, e^{0.02\,t}\right] = \dot{\ell}_t h - \left[w_0\, e^{0.02(t+h)} - w_0\, e^{0.02t}\right]$$

$$0.02\left[(0.439081)\, w_0\, e^{0.02\,t}\right] = 3\dot{\ell}_t - \left[w_0\, e^{0.02t} e^{0.02h} - w_0\, e^{0.02t}\right]$$

Reemplazando $h = 3$ y operando:

$$0.008782\left[w_0 e^{0.02t}\right] = 3\dot{\ell}_t - w_0 e^{0.02t}\left[e^{0.02(3)} - 1\right]$$

En el estado estacionario, la productividad crece a la tasa γ, es decir, $\dot{\ell}_t = \gamma\, \ell_t$, por lo tanto:

$$0.008782\left[w_0 e^{0.02t}\right] = 3(0.02\,\ell_t) - w_0 e^{0.02t}\left[e^{0.06} - 1\right]$$

$$(0.06)\,\ell_t = 0.008782\left[w_0 e^{0.02t}\right] + w_0 e^{0.02t}\left[e^{0.06} - 1\right]$$

$$(0.06)\,\ell_t = \left[w_0 e^{0.02t}\right]\left[e^{0.06} - 1 + 0.008782\right]$$

$$(0.06)\,\ell_t = (0.0706)\, w_0 e^{0.02t}$$

(xv) $\ell_t = 1.17697 w_0 e^{0.02t}$

Obteniendo las condiciones iniciales para w_0 y L_0, las variables endógenas del modelo quedan determinadas.

Política económica de acuerdo con el modelo de Kaldor y Mirrlees

La conclusión principal que se desprende del modelo señala que cualquier esquema de política que incentive la disminución del período de operación del equipo antiguo (como impuestos al uso de maquinaria obsoleta), llevará al incremento temporal de la tasa de crecimiento del producto per cápita, pues ocasionará un incremento del número de trabajadores disponibles para operar el nuevo equipo, λ_T, y por lo tanto, un incremento de la inversión.

Una medida de largo plazo, según el modelo, sería estimular el dinamismo tecnológico de la economía, es decir generar un incremento en la función de progreso técnico, medida que comprende mayor inversión en investigación y educación científica. En especial, debe impulsarse mejoras en las cualidades de gerencia y manejo empresarial por parte de los inversionistas, de modo que sean incentivados a promover el progreso técnico en lugar de mostrar resistencia hacia la introducción de las mejoras tecnológicas.

Solución numérica del modelo de Kaldor y Mirrlees (1962)

Para los siguientes valores:

$$n + \delta = 0.02 \quad ; \quad \gamma = 0.02 \quad ; \quad h = 3 \quad ; \quad s = 0.06 \quad ; \quad n = 0.01$$

Se obtienen las soluciones para las variables endógenas del modelo. Las variables endógenas son I_t, i_t, λ_t, ℓ_t, w_t, b_t, z, T, y_t, L_t. Los valores en el estado estacionario son:

(i)	$z = 0.133$	Ratio de trabajadores empleados en la operación de capital de la generación *t* sobre la fuerza laboral en el período *t*.
(ii)	$T = 8.14373$	Duración económica del *stock* de capital.
(vi)	$b_t = 0.0813$	Participación de los beneficios en el producto.
(viii)	$L_t = L_0 e^{0.01t}$	Fuerza laboral total empleada en el período *t*.
(ix)	$\lambda_t = (0.133) L_0 e^{0.01t}$	Parte de la fuerza laboral total empleada en la operación de capital de la generación *t*.
(x)	$w_t = w_0 e^{0.02t}$	Tasa salarial.
(xi)	$Y_t = (1.088)\, w_0 L_0 e^{(0.03)t}$	Producto total en el período *t*.
(xii)	$I_t = (0.0584)\, w_0 L_0 e^{(0.03)t}$	Inversión en el período *t*.
(xiii)	$i_t = 0.439081 w_0 e^{0.02t}$	Inversión por trabajador en capital de la generación *t*.
(xiv)	$y_t = (1.088)\, w_0 e^{0.02t}$	Producto per cápita.
(xv)	$\ell_t = 1.17697 w_0 e^{0.02t}$	Productividad por trabajador en las plantas de capital de la generación *t*.

Modelo de capital heterogéneo de Solow

Robert Solow (1987) plantea un modelo sin sustitución directa entre los factores, que incorpora capital heterogéneo y progreso técnico exógeno aumentador de trabajo. En este modelo, el capital heterogéneo es representado como distintos modelos de bienes que se distinguen por el período en el que fueron fabricados. Para diferenciarlos, estos modelos son llamados «generaciones» o «cosechas» (*vintage*, en inglés). Es decir, se asume que en cada período de tiempo se produce un único modelo de bienes de capital, los cuales tienen una duración económica determinada. Una vez cumplido este plazo de vida económica los bienes de capital de dicha generación se vuelven obsoletos y dejan de operar en la economía. De este modo, en un período dado, se encuentran en funcionamiento en la economía diversos modelos o generaciones de capital, es decir, todas aquellas generaciones que no han excedido su período de duración económica. Por lo tanto, el *stock* de capital de la economía está compuesto por la suma de los *stocks* de capital de cada generación en funcionamiento (capital heterogéneo).

De acuerdo con Solow, existen dos características en los modelos de crecimiento con capital homogéneo que resultan controvertidos. Por un lado, los modelos neoclásicos convencionales que presuponen la existencia de un *stock* de capital homogéneo, asumen que este *stock* de bienes de capital puede trabajarse con mayor o menor intensidad de trabajo para obtener una mayor o menor cantidad de producto. Sin embargo, tiene más sentido suponer que la producción con distintas intensidades de trabajo requiere de distintos tipos de bienes de capital. Por otro lado, la inclusión de progreso técnico exógeno en los modelos de crecimiento neoclásico resalta las dificultades que representa el supuesto de capital homogéneo, pues el progreso técnico no solo implica una mayor producción para un mismo número de trabajadores y bienes de capital. Por lo general, el progreso técnico altera la forma y el funcionamiento de los bienes de capital.

Como se trata de capital heterogéneo, no se puede agregar las generaciones bajo el concepto de *stock* de capital, por lo que esta noción es dejada de lado en el desarrollo del modelo. Sin embargo, Solow señala que la inclusión de capital heterogéneo en el modelo de crecimiento neoclásico no altera significativamente los resultados hallados en el modelo de crecimiento con capital homogéneo (Solow 1956):

> El resultado principal es que el comportamiento a largo plazo de esta economía más complicada es muy parecido al de la economía más sencilla que ya estudié. […] La variable acomodaticia clave que cambia (o puede cambiar) para permitir el estado estable no es la razón capital–producto; no hay ninguna razón capital–producto. Es, más bien, la vida económica del capital, la longitud de tiempo que transcurre entre el momento de la inversión y el momento en que se vuelve obsoleta la capacidad productiva instalada (Solow 2001 [1987]: 74).

Supuestos del modelo

En primer lugar, el modelo asume que en cada período se construye una cantidad determinada de bienes de capital homogéneos. En otras palabras, se construye una sola clase de bienes de capital por cada período. Sin embargo, el capital generado en un período difiere en sus características del capital generado en otro período. Es decir, en la economía existen tantas formas de capital como espacios de tiempo. Cada una de estas distintas formas de capital se denomina «generación» y se distingue por el período de tiempo en que se produjo. De este modo, el capital de la generación t, es aquel que fue producido en el período t.

Asimismo, cada unidad de bienes de capital de una generación específica proporciona una determinada capacidad productiva y requiere de una cantidad fija de trabajo para ser operada. Además, el progreso técnico es constante, pues los bienes de capital de las generaciones más recientes son más eficientes que la capacidad productiva de una generación anterior. Decir que las nuevas generaciones son más eficientes, significa que la producción per cápita de una fábrica que utiliza capital de última generación es mayor en relación a las fábricas que operan con generaciones de capital más antiguas.

Por otro lado, se supone que los bienes de capital duran para siempre, es decir no se gastan físicamente (la tasa de depreciación física es cero). Sin embargo, a pesar de que no se deprecien físicamente, los bienes de capital tienen un período limitado de duración económica. En otras palabras, dado que en cada período se crean máquinas cada vez más productivas, el capital de generaciones anteriores se va volviendo obsoleto. La obsolescencia es considerada ineficiencia económica, pues con el paso del tiempo, los costos para las firmas aumentan y si su productividad no aumenta a la vez, las fábricas más antiguas no estarán en condiciones de cubrir sus costos y asegurar un margen de beneficios que compense la inversión de los empresarios. Solow resalta que el fenómeno de la obsolescencia no puede ser analizado en los modelos con capital homogéneo, pues en esos modelos la obsolescencia se tendría que aplicar para todos los bienes de capital, pues estos son todos iguales. Finalmente, el modelo incorpora progreso técnico solo aumentador de trabajo.

El modelo

En cada momento del tiempo, la economía emplea un número de trabajadores $L(t)$ para producir $Y(t)$. Además, una parte del producto se ahorra a la tasa constante, s, y el ahorro de la economía en el período t debe ser igual a la inversión.

(1) $I(t) = sY(t)$

Asimismo, se necesitan $E(t)$ trabajadores para operar una unidad de capacidad productiva de la generación o modelo t, es decir, capacidad productiva construida en el momento t:

(2) $E(t) = E_0 e^{-\rho t}$

Donde ρ es la tasa de progreso técnico amplificador de trabajo y E_0 es la cantidad inicial de trabajadores necesarios por unidad de capacidad. Como se mencionó, las generaciones fabricadas recientemente tienen un mayor producto medio en relación a las generaciones anteriores. Esto equivale a señalar que las generaciones más recientes requieren una menor cantidad de trabajadores para operar una unidad de capacidad productiva en comparación con las generaciones más antiguas. Como el progreso técnico aumentador de trabajo crece a la tasa ρ, entonces, la eficiencia del trabajo está aumentando y la tasa a la que se ahorra trabajo con cada generación de capital es igual a ρ. Es por esto que la cantidad de trabajadores necesarios por unidad de capacidad productiva construida en el momento t, $E(t)$, tiene la forma $E_0 e^{-\rho t}$. A medida que aumenta t, y más generaciones de capital son fabricadas, la cantidad de trabajadores necesarios para operar una unidad de capacidad productiva se reduce a la tasa ρ.

Cada generación de capital proporciona una determinada capacidad productiva. Se define $\hat{Y}(t)$ como la capacidad productiva de generación t. Asimismo, se define $\lambda(t)$ como la cantidad de trabajadores empleados en la fábrica de generación t. El modelo asume que el producto fabricado con la utilización plena de la capacidad productiva de la generación t es igual a la capacidad productiva de dicha generación. Por lo tanto, $\lambda(t)$, el número de trabajadores necesarios para operar los bienes de capital de generación t será igual al producto de $E(t)$ (el número de trabajadores requerido para operar una unidad de capacidad productiva de la generación t) por la capacidad productiva de la generación t que es igual a $\hat{Y}(t)$.

$$E(t)\hat{Y}(t) = \lambda(t)$$

$$\left(E_0 e^{-\rho t}\right)\hat{Y}(t) = \lambda(t)$$

$$\hat{Y}(t) = \frac{1}{E_0 e^{-\rho t}}\lambda(t)$$

$$\hat{Y}(t) = \frac{e^{\rho t}}{E_0}\lambda(t)$$

Debe notarse que $\hat{Y}(t)$ se distingue de $Y(t)$, pues el primero alude al producto fabricado con las máquinas fabricadas en el período t, mientras que $Y(t)$ hace referencia al producto total de la economía en el período t (es decir, incluye el producto fabricado por los bienes de capital producidos en t, $t-1$, $t-2$, etcétera hasta $t-T$, donde T son los años de antigüedad de la generación más antigua en funcionamiento. Asimismo, $\lambda(t)$ también se distingue de $L(t)$ en el mismo sentido.

La producción per cápita en una fábrica con capacidad productiva de generación t es igual a:

$$\hat{y}(t) = \frac{\hat{Y}(t)}{\lambda(t)} = \frac{e^{\rho t}}{E_0}$$

$$(3)\quad \hat{y}(t) = \frac{e^{\rho t}}{E_0}$$

En las ecuaciones (2) y (3) se aprecia que el producto per cápita de las fábricas de generación t, $\hat{y}(t)$, es la inversa del número de trabajadores necesarios para operar una unidad de capacidad productiva de la generación t, $E(t)$.

$$\hat{y}(t) = \left[E(t)\right]^{-1} = \left(E_0 e^{-\rho t}\right)^{-1}$$

Por lo tanto, mientras que la cantidad de trabajadores necesarios por unidad de capacidad producto, $E(t)$, se reduce a la tasa ρ conforme más bienes de capital son fabricados, el producto medio en una fábrica con capacidad productiva de generación t, $\hat{y}(t)$, aumenta a la tasa ρ, pues el *stock* de capital de las generaciones más recientes tiene un mayor producto por trabajador que el *stock* de capital más antiguo.

Una vez realizada la inversión, la producción per cápita de cada generación es constante por el resto del tiempo de funcionamiento del capital de esa generación (es decir, hasta que se vuelva obsoleto). Asimismo, el producto crece a la tasa g, constante en el tiempo:

$$(4)\quad Y(t) = Y_0 e^{gt}$$

Por lo tanto, juntando las ecuaciones (1) y (4), se obtiene que la inversión en t es igual a:

$$(5)\quad I(t) = sY_0 e^{gt}$$

Por su parte, el crecimiento de la fuerza laboral se da a una tasa n también constante en el tiempo:

$$(6)\quad L(t) = L_0 e^{nt}$$

Tomando logaritmos y diferenciando con respecto al tiempo, se obtiene:

$$\ln\left(L(t)\right) = \ln\left(L_0\right) + nt$$

$$\frac{d\ln\left(L_t\right)}{dt} = \frac{d\ln\left(L_0\right)}{dt} + \frac{d\left(nt\right)}{dt}$$

$$\frac{\dot{L}(t)}{L_t} = n$$

$$\frac{\dot{L}(t)}{L_0 e^{nt}} = n$$

En otras palabras, en cualquier instante del tiempo el empleo crece en:

(7) $\dot{L}(t) = nL_0 e^{nt}$

La economía debe distribuir el trabajo entre las distintas generaciones de capital en funcionamiento. De este modo, asignará primero trabajadores a las fábricas más modernas (más productivas) y posteriormente asignará el empleo a las de generaciones más antiguas, en orden de menor a mayor antigüedad. En una economía competitiva, tal asignación se realiza a través de los salarios reales. La flexibilidad de los salarios reales asegura la eficiencia de la asignación de recursos en la economía. Por lo tanto, en cada período, el salario real es empujado al alza por el aumento de demanda de mano de obra ocasionado por el requerimiento de trabajadores de las nuevas fábricas construidas en el período.

De esta manera, las fábricas que operan con capital de generaciones más antiguas se vuelven obsoletas en el momento en que su producto por trabajador es menor que el salario real vigente en la economía. Por ello, se ven obligadas a cerrar, pues, si siguieran en funcionamiento, la firma incurriría en pérdidas debido a que sus costos excederían sus ingresos. Por lo tanto, se puede concluir que el salario real será igual al producto per cápita de la fábrica más antigua en funcionamiento.

$T(t)$ son los años de antigüedad en el momento t de la capacidad productiva que está funcionando en t. $T(t)$ es la edad del capital, es decir, representa el capital de modelo $t - T(t)$. La duración del capital varía entre las distintas generaciones de capital y solo permanece constante una vez alcanzado el estado estacionario. Si una generación de capital tiene $T(t)$ períodos de antigüedad en t, esto quiere decir que la máquina fue construida en el período $t - T(t)$. Por ejemplo, si en el año 2008 una máquina tiene 20 años de antigüedad, entonces $T(t) = 20(2008)$ y $t - T(t) = 2008 - 20 = 1988$, la máquina fue construida en 1988. El producto medio de esta generación de bienes de capital será, por lo tanto, denotado como $\hat{y}(t - T(t))$, en el ejemplo, $\hat{y}(1988)$.

En el período t, se produce la generación de capital t y la fábrica que opera con el *stock* de capital construido hace $T(t)$ años, es decir, la generación producida en el período $t - T(t)$, debe cerrar. En otras palabras, los bienes de capital de la generación $t - T(t)$ se han vuelto obsoletos en el período t, pues ya trascurrió la vida económica del *stock* de capital de esta generación $T(t)$. Por lo tanto, el producto per cápita de la fábrica más antigua en funcionamiento (las fábricas de generación $t - T(t)$) será:

$$\hat{y}\,(t - T(t)) = \frac{e^{\rho(t-T(t))}}{E_0}$$

En una economía competitiva con precios flexibles y firmas que maximizan sus utilidades, una fábrica antigua estará en funcionamiento si el salario real vigente fuera igual o menor que su producto por persona. Por lo tanto, el salario real vigente en la economía será:

$$(8)\quad w(t) = \frac{e^{\rho(t-T(t))}}{E_0}$$

Por otro lado, la inversión del tiempo t crea aI_t de nueva capacidad productiva. En las palabras de Solow: «la inversión de una unidad de producto crea a unidades de capacidad productiva» (Solow 2001 [1987]: 76). En consecuencia, la capacidad productiva de generación t será:

$$\hat{Y}(t) = aI(t)$$

El parámetro a es constante, pues no hay progreso técnico amplificador del capital. Por lo tanto, la capacidad productiva del *stock* de capital de la última generación será igual a:

$$(9)\quad aI(t) = asY_0e^{gt}$$

Pues $I\,(t) = sY\,(t)$

De acuerdo con Solow, la capacidad de las fábricas del modelo más nuevo es igual al producto de plena utilización de dicha capacidad. Producto y capacidad de la generación t son equivalentes.

El modelo con capital heterogéneo de Solow (1987)

En resumen, el modelo está compuesto por las siguientes ecuaciones:

(1) $I(t) = sY(t)$	Inversión en t
(2) $E(t) = E_0 (e^{-\rho t})$	Número de trabajadores necesarios para operar una unidad de capacidad productiva de la generación t
(3) $\hat{y}(t) = (E_0)^{-1} e^{\rho t}$	Producto per cápita de la generación t
(4) $Y(t) = Y_0 e^{gt}$	Dinámica de crecimiento del producto
(5) $I(t) = s\, Y_0 e^{gt}$	Condición de equilibrio
(6) $L(t) = L_0 e^{nt}$	
(7) $\dot{L}(t) = \mathrm{n}\, L_0 e^{nt}$	Dinámica de crecimiento de la fuerza laboral
(8) $w(t) = (E_0)^{-1} e^{\rho(t-T(t))}$	Tasa salarial
(9) $aI(t) = asY_0 e^{gt}$	La capacidad productiva del *stock* de capital de la última generación

Las variables endógenas son $I(t)$, $\hat{y}(t)$, $w(t)$, $T(t)$. Los parámetros del modelo son la tasa de ahorro (s), la tasa de crecimiento de la fuerza laboral (n), la tasa de crecimiento del progreso técnico (ρ) y el parámetro a de incremento de capacidad y las condiciones iniciales (E_0) y (L_0).

El estado estacionario

A diferencia de los modelos neoclásicos en los que la relación capital–producto se ajusta para permitir la convergencia al equilibrio de largo plazo, en este modelo, no existe una única relación capital–producto, pues no se puede hablar propiamente de un *stock* de capital agregado. El estado estacionario es ahora una situación en la cual el producto y el empleo crecen de modo exponencial a una tasa constante y se consume una fracción constante del producto, destinando el resto al ahorro.

Se requiere de $\lambda(t)$ trabajadores para operar la capacidad productiva de nueva generación. En otras palabras, $\lambda(t)$, es igual a la cantidad de trabajadores necesaria por unidad de capacidad productiva de la generación t, $E(t)$, multiplicada por las unidades de capacidad productiva generadas con la inversión en t, $aI(t)$:

$$\lambda(t) = E(t)\, a\, I(t)$$

$$\lambda(t) = \left(E_0 e^{-\rho t}\right) a\, I(t)$$

$$\lambda(t) = \left(E_0 e^{-\rho t}\right) a\, s \left(Y_0 e^{gt}\right)$$

(10) $\lambda(t) = a\, s\, E_0\, Y_0\, e^{(g-\rho)t}$

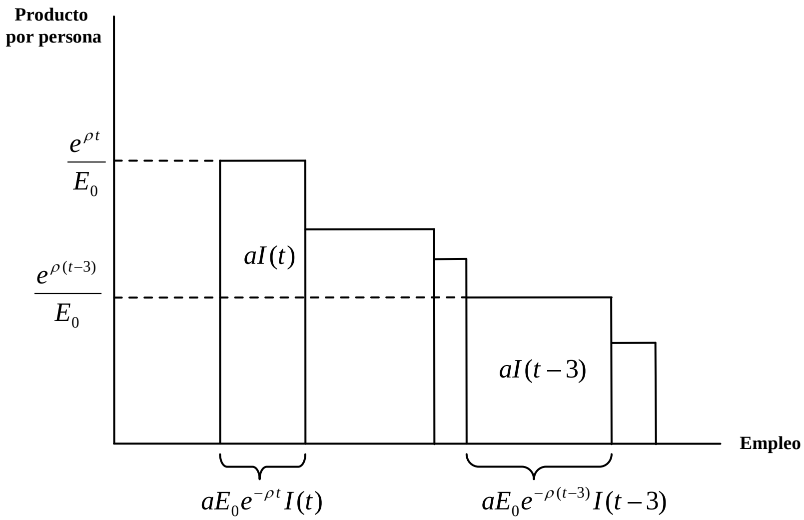
El modelo se puede representar como se muestra en el gráfico 3.13. En el eje horizontal se presenta el empleo generado por cada generación de capital. En el eje vertical se presenta el producto por trabajador. Como vemos, el producto medio de la generación de capital fabricada en el período *t* es mayor que el producto medio de la generación fabricada en el período $t - 3$. Para el momento *t* se construye un rectángulo de base $\left(E_0 e^{-\rho t}\right) a\, I(t)$, es decir, la fuerza laboral necesaria para operar la capacidad productiva de la generación construida en el período *t* y de altura igual al producto por trabajador en las fábricas de generación *t*, $(E_0)^{-1} e^{\rho t}$. El área al interior del rectángulo es igual a la capacidad productiva de la generación *t*, $aI\,(t)$, o al producto de plena utilización de la capacidad productiva de dicha generación, $\hat{Y}\,(t)$.

Del mismo modo, se construye un rectángulo para el período $t - 1$ y se coloca al lado del rectángulo del momento *t*. La altura de este rectángulo será menor, pues el producto medio es menor en las fábricas más antiguas. La altura será menor en una proporción igual al factor que representa la tasa de progreso tecnológico amplificador de trabajo. La longitud de la base dependerá de la inversión en el momento $t - 1$, $I\,(t - 1)$. Si el volumen de inversión es constante, entonces la base del rectángulo en el momento $t - 1$ será mayor que la base del rectángulo del momento *t*, pues una misma cantidad de capacidad productiva de menor productividad requiere más fuerza de trabajo que la opere (Solow 2001 [1987]: 79).

La producción de cada generación de capacidad productiva es:

Generación *t*:	$\hat{Y}\,(t) = aI\,(t)$
Generación $t - 1$:	$\hat{Y}\,(t - 1) = aI\,(t - 1)$
Generación $t - T\,(t)$:	$\hat{Y}\,(t - T\,(t)) = aI\,(t - T\,(t))$

Gráfico 3.13
Empleo y productividad en el modelo de capital heterogéneo de Solow



Fuente: Solow 2001[1987]: 78.

Debe recordarse que, en cada período, la fábrica que operaba con el *stock* de capital más antiguo se ve forzada a cerrar debido a las pérdidas generadas por la obsolescencia de sus bienes de capital. Así, los trabajadores hasta entonces empleados en la fábrica que se vuelve obsoleta pierden su empleo. Para saber cuántos trabajadores han sido despedidos, se debe calcular el número de trabajadores empleados en las fábricas más antiguas en operación.

En el transcurso al estado estacionario, la vida económica del capital es variable y es la variable que debe ajustarse para asegurar la convergencia al equilibrio de estado estacionario. Sin embargo, una vez alcanzado el estado estacionario, la duración económica del capital se mantiene constante en T.

La nueva capacidad productiva, o de generación t, es igual a $a\, s\, Y_0\, e^{gt}$. Esta nueva capacidad puede proporcionar empleo en una magnitud igual a $a\, s\, E_0\, Y_0\, e^{(g-\rho)t}$. Se entiende que de este total de empleos, una parte corresponde al que requieran los trabajadores desplazados de las fábricas que pasaron a ser obsoletas o están al margen.

El número de trabajadores desplazados, si el lapso de vida económica (T) de los bienes de capital es constante, correspondería, por lo tanto, a los trabajadores empleados precisamente en las fábricas con la edad T:

$$\lambda(t-T) = E_0 e^{-\rho(t-T)} as Y_0 e^{g(t-T)}$$

(11) $\lambda(t-T) = E_0\, a\, s\, Y_0 e^{(g-\rho)(t-T)}$

Este sería el número de trabajadores que se quedan sin empleo porque las fábricas de generación *T*, se convirtieron en obsoletas.

Los modelos neoclásicos asumen que la economía crece en su nivel de pleno empleo. Por lo tanto, la tasa de desempleo es igual a cero. De las definiciones del capítulo uno, se sabe que la tasa de desempleo es igual al ratio de desempleados en relación a la fuerza laboral total. El número de desempleados es igual a la diferencia entre la oferta de trabajo (fuerza laboral) y la demanda de trabajo (trabajadores empleados).

$$\mu = \frac{U}{L^s} = \frac{L^s - L^d}{L^s}$$

$$\mu = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{L^s - L^d}{L^s} = 0 \quad \rightarrow \quad L^s = L^d$$

En el largo plazo, la tasa de desempleo se mantiene constante. Por lo tanto, dada una situación inicial de pleno empleo, los incrementos en la oferta de trabajo deben ser iguales a los incrementos en la demanda de trabajo. De este modo, en una situación de pleno empleo, mantener la tasa de desempleo constante implica que la tasa de crecimiento del número de trabajadores desempleados sea cero.

Calculando la tasa de crecimiento de los trabajadores desempleados, se obtiene:

$$\frac{\dot{U}}{U} = \frac{\dot{(L^s - L^d)}}{L^s - L^d} = \frac{\dot{L}^s - \dot{L}^d}{L^s - L^d}$$

$$\frac{\dot{U}}{U} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dot{L}^s - \dot{L}^d}{L^s - L^d} = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{L}^s = \dot{L}^d$$

En nuestro modelo, para asegurar que la variación en el tiempo entre la oferta y la demanda de trabajo sea equivalente, el incremento natural de la oferta de trabajo, $nL(t)$, más los trabajadores que estaban ocupados en la fábrica de generación $t - T$, la fábrica que cierra porque su *stock* de capital se ha vuelto obsoleto, $\lambda(t - T)$, debe compensar el incremento en la demanda generado por el requerimiento de empleo de la nueva fábrica, $\lambda(t)$.

$\dot{L}^s = n\,L(t) + \lambda(t-T)$	Variación en la oferta de trabajo
$\dot{L}^d = \lambda(t)$	Variación en la demanda de trabajo
$\dot{L}^s = \dot{L}^d$	Condición para el crecimiento con pleno empleo

Por lo tanto:

(12) $n\,L(t)+\lambda\,(t-T)=\lambda\,(t)$

Reemplazando los valores de $\lambda\,(t)$ y $\lambda\,(t-T)$ dados por las ecuaciones (10) y (11), respectivamente, $E_0 as Y_0 e^{(g-\rho)t}$ y $E_0 as Y_0 e^{(g-\rho)(t-T)}$, se obtiene:

$$nL(t)+E_0 as Y_0 e^{(g-\rho)(t-T)}=E_0 as Y_0 e^{(g-\rho)t}$$

$$nL(t)=E_0 as Y_0 e^{(g-\rho)t}-E_0 as Y_0 e^{(g-\rho)(t-T)}$$

$$nL_0 e^{nt}=E_0 as Y_0 e^{(g-\rho)t}-E_0 as Y_0 e^{(g-\rho)(t-T)}$$

(13) $nL_0 e^{nt}=asE_0 Y_0 e^{(g-\rho)t}\left[1-e^{-(g-\rho)T}\right]$

Si tomamos logaritmos y derivamos con respecto al tiempo se puede hallar la tasa de crecimiento de la expresión anterior.

$$\ln(n)+\ln(N_0)+nt=\ln(a)+\ln(s)+\ln(E_0)+\ln(Y_0)+(g-\rho)t+\ln\left[1-e^{-(g-\rho)T}\right]$$

$$\frac{d\ln(n)}{dt}+\frac{d\ln(N_0)}{dt}+\frac{dnt}{dt}=\frac{d\ln(a)}{dt}+\frac{d\ln(s)}{dt}+\frac{d\ln(E_0)}{dt}+\frac{d\ln(Y_0)}{dt}+\frac{d(g-\rho)t}{dt}+\frac{d\ln\left[1-e^{-(g-\rho)T}\right]}{dt}$$

Puesto que n, L_0, a, s, E_0, Y_0 y $\left[1-e^{-(g-\rho)T}\right]$ no dependen de t, esta expresión puede reducirse a:

$$n=g-\rho$$

La expresión del lado derecho de la ecuación (13) está creciendo exponencialmente a una tasa $g-\rho$, mientras que el término de la izquierda lo hace a una tasa igual a n. Por lo tanto, para que la igualdad entre la variación en la oferta de trabajo y la variación en la demanda de trabajo se mantenga a lo largo del tiempo, debe cumplirse que la tasa de crecimiento del producto sea igual a la suma de la tasa de crecimiento de la fuerza laboral y del progreso técnico aumentador de trabajo. De esta forma se asegura el crecimiento con pleno empleo.

(14) $g=n+\rho$

Por otra parte, el incremento de la producción en cualquier momento del tiempo será igual a:

$$\dot{Y}_t=gY_t$$

Utilizando la ecuación (3), se obtiene:

$$\dot{Y}_t = gY_0e^{(n+\rho)t}$$

Reemplazando la tasa de crecimiento del producto, g, por su equivalente en la ecuación (14), se obtiene:

(15) $\dot{Y}_t = (n+\rho)Y_0e^{(n+\rho)t}$

Además, el incremento del producto también es igual a la capacidad de las fábricas del modelo más reciente menos la capacidad de las fábricas más antiguas que dejan de operar al volverse obsoletas:

$$aI(t) - aI(t-T) = asY_0e^{(n+\rho)t} - asY_0e^{(n+\rho)(t-T)}$$

(16) $aI(t) - aI(t-T) = asY_0e^{(n+\rho)t}(1-e^{-(n+\rho)T})$

Las ecuaciones (15) y (16) son equivalentes, pues el incremento de la producción debe ser igual al incremento de la capacidad, es decir, $\dot{Y}(t) = \hat{Y}(t) - \hat{Y}(t-T)$. Por lo tanto:

$$(n+\rho)Y_0e^{(n+\rho)t} = asY_0e^{(n+\rho)t}(1-e^{-(n+\rho)T})$$

Dividiendo ambos lados por $Y_0\, e^{(n+\rho)t}$, se obtiene finalmente que:

(17) $g = n+\rho = as(1-e^{-(n+\rho)T})$

(18) $g = as\left(1-\frac{1}{e^{(n+\rho)T}}\right)$

Esta es una condición de estabilidad y está integrada por el lapso de vida T, que suponemos constante, y los parámetros exógenos n, ρ, α y s.

De la ecuación (18) se halla un valor para T en el estado estacionario:

$$g = as - \frac{as}{e^{(n+\rho)T}}$$

$$\frac{as}{e^{(n+\rho)T}} = as - g$$

$$as = (as-g)e^{(n+\rho)T}$$

$$e^{(n+\rho)T} = \frac{as}{(as-g)}$$

Tomando logaritmos:

$$(n+\rho)T = \ln\left(\frac{as}{as-g}\right)$$

$$gT = \ln a + \ln s - \ln(as-g)$$

$$(19)\quad T = \frac{\ln a + \ln s - \ln(as-g)}{g}$$

En este modelo, no es la relación capital–producto la variable que se ajusta conforme la economía se acerca a su estado estacionario. En este modelo, el lapso de vida económica, T_t, debe ajustarse de modo que los valores arbitrarios de los demás parámetros sean congruentes con un comportamiento de estado estacionario (Solow 2001 [1987]: 86). En el estado estacionario, la vida económica del capital es constante, pero fuera de este, $T(t)$ varía de una generación a otra.

Por otro lado, podemos notar que la ecuación (18) es una condición de compatibilidad, muy parecida a la condición de Harrod y Domar:

Harrod-Domar	**Solow (1987)**
$g = \frac{s}{v}$	$g = sa\left(1 - \frac{1}{e^{(n+\rho)T}}\right)$

El término $a(1-e^{-(n+\rho)T})$ es la versión, con capital heterogéneo, de la inversa de la relación capital–producto con capital homogéneo, $1/v$, pues a representa la capacidad de producción que se puede generar con una unidad de inversión. En sentido estricto, en este modelo no existe una relación capital–producto, pero, puesto que la inversión es una fracción fija de la capacidad de producción, en todas y cada una de las generaciones y la duración de los bienes de capital está constante, el capital debe aumentar a la misma tasa que el producto.

Solow se pregunta si existirá un valor de T que satisfaga la condición del estado estacionario. Dado que T puede tener cualquier valor entre cero e infinito, la expresión $1-e^{-gT}$ puede poseer cualquier valor entre cero y uno. Por ende, Solow concluye que siempre habrá un único valor de T que satisfaga la condición, si se cumple que $as > g$. Si, por el contrario, se cumpliera que $as < g$, la condición no podría satisfacerse en absoluto. Esta situación podría presentarse en una economía que tiene una elevada tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo efectiva, y una tasa de ahorro reducida, de modo que no se puede dotar de trabajo a la creciente fuerza laboral. Descartando esta posibilidad (es decir, asumiendo que $as > g$), Solow concluye que habrá un estado estacionario correspondiente a cada conjunto de parámetros de la economía. Cada estado estacionario estará caracterizado por el lapso de vida económica constante que rige en él, T.

Dividiendo la ecuación (13) entre e^{nt} se obtiene:

$$\frac{nL_0 e^{nt}}{e^{nt}} = \frac{asE_0 Y_0 e^{nt}\left[1-e^{-nT}\right]}{e^{nt}}$$

$$nL_0 = \left[1-e^{-nT}\right] a\, s\, E_0 Y_0$$

Dados los valores de a, s, n, E_0 y T, se puede hallar un valor para Y_0:

$$(20)\quad Y_0 = \frac{nL_0}{\left[1-e^{-nT}\right] asE_0}$$

Solow concluye que el comportamiento de las variables en el estado estacionario de este modelo es muy parecido al que presentaban en los modelos con capital homogéneo. Por un lado, el producto crece geométricamente a una tasa igual a la tasa de crecimiento poblacional más la tasa del progreso técnico. Es decir, el producto per cápita crece a la tasa de crecimiento del progreso técnico aumentador de trabajo. Por otro lado, el salario real está creciendo a la misma tasa que el producto per cápita, y la masa salarial crece a la misma tasa que el producto, es decir, es una fracción constante del producto. La magnitud de esta proporción dependerá de los parámetros de la economía. Solow señala para concluir su presentación:

> Puesto que lo que me interesa principalmente son las propiedades a muy largo plazo de una economía que está creciendo en estado estable, mi conciencia ya está tranquila y puedo regresar al modelo tradicional, más sencillo. Y lo puedo hacer porque he verificado que los dos modelos en realidad se parecen mucho desde este punto de vista a muy largo plazo. En las transiciones es donde funciona de manera muy distinta, y esta en concreto nos cuenta probablemente una parábola más realista. (Solow 2001 [1987]: 91).

Soluciones del modelo con capital heterogéneo de Solow (1987)

(10) $g = n + \rho$ Tasa de crecimiento del producto

(19) $T = \dfrac{\ln a + \ln s - \ln(as - g)}{g}$ Duración económica del capital

(20) $Y_0 = \dfrac{nL_0}{\left(1 - e^{-nT}\right) asE_0}$ Nivel inicial de producto

Con estas ecuaciones se puede hallar los valores para el producto de la economía, la inversión y el salario real siguiendo las ecuaciones (4), (5) y (7), respectivamente:

(4) $Y_t = Y_0 e^{gt}$ $\quad Y_t^* = \dfrac{nL_0}{(1 - e^{-nT^*}) asE_0} e^{g^* t}$ Producto

(5) $I_t = sY_0 e^{gt}$ $\quad I_t^* = s \dfrac{nL_0}{(1 - e^{-nT^*}) asE_0} e^{g^* t}$ Inversión

(7) $w_t = \dfrac{e^{\rho(t - T_t)}}{E_0}$ $\quad w_t^* = \dfrac{e^{\rho(t - T^*)}}{E_0}$ Tasa salarial

Como resumen, el modelo descrito contiene las siguientes tres ecuaciones:

(1) $I(t) = sY(t)$

(2) $Y(t) = \displaystyle\int_{t-T(t)}^{t} aI(v)dv$

(3) $L(t) = \displaystyle\int_{t-T(t)}^{t} aE_0 e^{-\rho\tau} I(v)dv$

Para solucionar el modelo, se diferencia las ecuaciones (2) y (3). Utilizando el teorema fundamental del cálculo, se obtiene:

(4) $\dot{Y}(t) = aI(t) - aI(t - T(t))$

(5) $\dot{L}(t) = aE_0 e^{-\rho t} I(t) - aE_0 e^{-\rho(t-T(t))} I(t - T(t))$

Reemplazando $\dot{Y}(t) = gY(t)$, $Y(t) = Y_0 e^{gt}$ y $I(t) = sY(t)$, la ecuación (4) se expresa como:

$$gY_0 e^{gt} = asY_0 e^{gt} - asY_0 e^{g(t-T(t))}$$

(4') $gY_0 e^{gt} = asY_0 e^{gt}\left[1 - e^{-gT}\right]$

En la ecuación (5), se reemplaza $\dot{L}(t) = nL(t)$, $L(t) = L_0 e^{nt}$ y $I(t) = sY(t)$

$$nL_0 e^{nt} = aE_0 e^{-\rho t} sY_0 e^{gt} - aE_0 e^{-\rho(t-T(t))} sY_0 e^{g(t-T(t))}$$

(5') $nL_0 e^{nt} = aE_0 sY_0 e^{(g-\rho)t} - aE_0 sY_0 e^{(g-\rho)(t-T(t))}$

Factorizando el lado derecho de la ecuación (5'), y recordando que $n = g - \rho$, es decir, $g = n + \rho$, se obtiene:

$$nL_0 e^{nt} = aE_0 sY_0 e^{nt}\left[1 - e^{-nT}\right]$$

(6) $nL_0 = aE_0 sY_0\left[1 - e^{-nT}\right]$

Utilizando la ecuación (4'), se despeja T. Dividiendo ambos lados de la ecuación (4') entre $Y_0 e^{gt}$ y reemplazando $g = n + \rho$, se tiene:

$$n + \rho = as\left[1 - e^{-(n+\rho)T}\right]$$

$$e^{-(n+\rho)T} = 1 - \frac{n+\rho}{as}$$

$$e^{-(n+\rho)T} = \frac{as - n - \rho}{as}$$

$$-(n+\rho)T = \ln\left[\frac{as - n - \rho}{as}\right]$$

$$-(n+\rho)T = \ln(as - n - \rho) - \ln(as)$$

$$(7)\ \ T = \frac{\ln(as) - \ln(as - n - \rho)}{n + \rho}$$

De la ecuación (6), se despeja el valor de la condición inicial, Y_0:

$$nL_0 = aE_0 sY_0 \left[1 - e^{-nT}\right]$$

$$(8)\ \ Y_0 = \frac{nL_0}{aE_0 s\left[1 - e^{-nT}\right]}$$

Donde T está dada por su valor de la ecuación (7).

Política económica de acuerdo con el modelo con capital heterogéneo de Solow

El modelo de crecimiento de Solow con capital heterogéneo tiene como solución de estado estacionario la duración económica del capital dada por la ecuación (18). Por lo tanto, los parámetros que influyen sobre la duración de los bienes de capital en el estado estacionario son la tasa de ahorro (s), la tasa de crecimiento de la población (n), la tasa de crecimiento del progreso técnico (ρ) y el coeficiente de expansión de la capacidad productiva (a). A continuación se presenta brevemente los efectos sobre la solución del modelo que representan cambios en los parámetros.

Un aumento en la tasa de ahorro

Este incremento no altera la tasa de crecimiento de la economía, pero reduce el plazo de vida económica del capital. Dado que $as > g$, entonces, la derivada de T de estado estacionario con respecto a la tasa de ahorro es negativa.

Derivando la ecuación (19) con respecto a la tasa de ahorro, se obtiene:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{d\,\dfrac{\ln a + \ln s - \ln(as - g)}{g}}{ds}$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{g}\left(\frac{1}{s} - \frac{a}{as - g}\right)$$

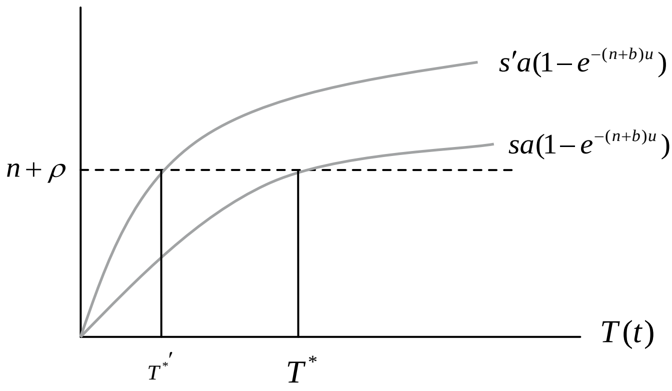
$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{g}\left(\frac{(as - g) - as}{s(as - g)}\right)$$

$$\frac{dT}{ds} = \frac{1}{g}\left(\frac{-g}{s(as - g)}\right)$$

$$\frac{dT}{ds} = -\frac{1}{s(as - g)} < 0$$

De este modo, a una tasa de ahorro más alta le corresponde una duración de vida económica más corta. Es decir, un mayor volumen de ahorro se traduce en que el capital se vuelve obsoleto más rápidamente. Esto se debe a que al aumentar el ahorro, y por ende la inversión, habrá más capital nuevo que compita con el capital antiguo y desplace la mano de obra desde este último al más moderno.

Gráfico 3.14
Modelo de capital heterogéneo de Solow



Como consecuencia de esta reducción en la vida económica del capital, la productividad marginal en cualquier momento del tiempo va a ser mayor y en consecuencia el salario real será también más elevado. Asimismo, las utilidades de las firmas serán menores y la tasa de utilidad también. Finalmente el producto per cápita es más elevado porque la capacidad productiva que se emplea con mayor intensidad es más eficiente.

Incremento de la tasa de crecimiento poblacional

A diferencia del caso anterior, si la población crece más aceleradamente, se prolonga la vida económica del capital, pues al haber mayor oferta de trabajo el salario no aumenta tan rápido y las fábricas que operan con capital de generaciones antiguas pueden sobrevivir por más tiempo. Por tanto, la tasa de utilidades será más alta y el salario real será más bajo.

Crecimiento de la tasa de progreso tecnológico

El aumento de la tasa ρ, tiene dos efectos que se contraponen sobre la duración del *stock* de capital. Por un lado, un cambio tecnológico más rápido implica una reducción en la duración económica de las fábricas, pues el producto y la inversión crecen a mayor velocidad. Por otro lado, mayor crecimiento del progreso técnico significa que la nueva capacidad productiva genera menos empleo, por lo tanto los costos variables de las firmas no aumentan tan rápido, además se requiere que las fábricas sigan funcionando para mantener el pleno empleo y por ende el plazo de duración económica de las fábricas se extiende. Solow concluye que para este modelo, el segundo efecto tiene mayor impacto y por ende, el aumento de la tasa ρ, tiene los mismos efectos que el incremento de la fuerza laboral (n). Es decir, un incremento en ρ extiende la duración económica de los bienes de capital (Solow 2001 [1987]: 91).

Para analizar el impacto de un incremento de la tasa de progreso técnico sobre la duración económica del capital en el estado estacionario, derivamos T con respecto a ρ. En el estado estacionario, $g = n + \rho$, por lo tanto, T es igual a:

$$T = \frac{\ln a + \ln s - \ln\left[as - (n+\rho)\right]}{(n+\rho)}$$

$$T = \frac{\ln\left[as\right] - \ln\left[as - (n+\rho)\right]}{(n+\rho)}$$

$$T = \frac{\ln\left[as\right]}{(n+\rho)} - \frac{\ln\left[as - (n+\rho)\right]}{(n+\rho)}$$

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{d\,\dfrac{\ln\left[as\right]}{(n+\rho)}}{d\rho} - \frac{d\,\dfrac{\ln\left[as - (n+\rho)\right]}{(n+\rho)}}{d\rho}$$

$$\frac{dT}{d\rho} = -\frac{\ln\left[as\right]}{(n+\rho)^2} - \frac{(n+\rho)d\ln\left[as - (n+\rho)\right] - \ln\left[as - (n+\rho)\right]d(n+\rho)}{(n+\rho)^2}$$

$$\frac{dT}{d\rho} = -\frac{\ln\left[as\right]}{(n+\rho)^2} - \frac{\dfrac{-(n+\rho)}{\left[as - (n+\rho)\right]} - \ln\left[as - (n+\rho)\right]}{(n+\rho)^2}$$

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{\dfrac{(n+\rho)}{\left[as - (n+\rho)\right]} + \ln\left[as - (n+\rho)\right] - \ln\left[as\right]}{(n+\rho)^2}$$

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{(n+\rho) + \left[as - (n+\rho)\right]\ln\left[as - (n+\rho)\right] - \left[as - (n+\rho)\right]\ln\left[as\right]}{\left[as - (n+\rho)\right](n+\rho)^2}$$

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{(n+\rho) + \left[as - (n+\rho)\right]\left[\ln(as - n - \rho) - \ln(as)\right]}{\left[as - (n+\rho)\right](n+\rho)^2}$$

El término entre corchetes $as-(n+\rho)$ es positivo pues se ha asumido que $as>g$ y en el estado estacionario $g=n+\rho$. En el modelo de Solow con capital heterogéneo un incremento en ρ extiende la duración económica de los bienes de capital, por lo tanto, debe cumplirse que:

- Si $\ln[as-(n+\rho)]$ y $\ln[as]$ son positivos:

$$\ln[as-(n+\rho)]>\ln[as]$$

- Si $\ln[as]$ es positivo y $\ln[as-(n+\rho)]$ es negativo:

$$(n+\rho)>[as-(n+\rho)][\ln(as-g)-\ln(as)]$$

- Si $\ln[as]$ y $\ln[as-(n+\rho)]$ son negativos:

$$\ln[as]>\ln[as-(n+\rho)]$$

Referencias bibliográficas

Bhaduri, Amit

1966 «The Concept of the Marginal Productivity of Capital and the Wicksell Effect». *Oxford Economic Papers* XVIII, pp. 284-288

Clark, John Bates

1899 *The Distribution of Income*. Macmillan: Nueva York.

Eatwell, John

1976 «Irving Fisher's 'Rate of Return Over Cost' and the Rate of Profit in a Capitalist Economy». En Murray Brown, Kazuo Sato y Paul Zarabembka (Eds.), *Essays in Modern Capital Theory* (pp. 77-96). Amsterdam y Nueva York: North Holland.

Fisher, Irving

1930 *The Theory of Interest: As Determined by Impatience to Spend Income and Opportunity to Invest It*. Nueva York: Kelley and Millman.

Garegnani, Pierangelo

1966 «Switching of Techniques». *Quarterly Journal of Economics* 80, pp. 554-567.

1970 «Heterogeneous Capital, the Production Function and the Theory of Distribution». *The Review of Economic Studies* 37(3), pp. 407-436.

1972 *Il Capitale nelle teorie della distribuzione*. Milán: Dott. A. Giuffrè.

1976 «The Neoclassical Production Function: Comment». *Amercian Economic Review* 66, pp. 424-427.

1990 «Quantity of Capital». En John Eatwell, Murray Milgate y Peter Newman (Eds.), *Capital Theory: The New Palgrave* (pp. 1-78). Londres: Macmillan.

2003 «Savings, Investment and Capital in a System of General Intertemporal Equilibrium». En Frank Hahn y Fabio Petri (Eds.), *General Equilibrium: Problems and Prospects* (pp. 117-172). Londres: Routledge.

2005 «Further on Capital and Intertemporal Equilibria: A Rejonder to Mandler», *Metroeconomica* 56(4), pp. 495-502.

2008 «Capital in the Neoclassical Theory. Some Notes». Mimeo.

Harcourt, Geoff

1969 «Some Cambridge Controversies in the Theory of Capital». *Journal of Economic Literature* 7(2), pp. 369-405.

1976 «The Cambridge Controversies: Old Ways and New Horizons —Or Dead End?». *Oxford Economic Papers* 28(1), pp. 25-65.

Kaldor, Nicholas

1970 «Some Fallacies in the Interpretation of Kaldor». *The Review of Economic Studies* 37(1), pp. 1-7.

Kaldor, Nicholas & James Mirrlees

1962 «A New Model of Economic Growth». *The Review of Economic Studies* 29(3), pp. 174-192.

Krugman, Paul

2007 *The Conscience of a Liberal*. Nueva York y Londres: W.W. Norton & Company.

Nell, Edward J.

1970 «A Note on Cambridge Controversies in Capital Theory». *Journal of Economic Literature* 8(1), pp. 41-44.

1976 «The Black Box Rate of Return». En Murray Brown, Kazuo Sato y Paul Zarabembka (Eds.), *Essays in Modern Capital Theory* (pp. 96-116). Amsterdam y Nueva York: North Holland.

Nell, Edward J. & David Laibman

1977 «Reswitching, Wicksell Effects and the Neo-Classical Production Function». *American Economic Review* 67, pp. 878-88.

Nuti, Domenico

1969 «The Degree of Monopoly in the Kaldor-Mirrlees Growth Model». *Review of Economic Studies* 36(106), pp. 257-260.

Pasinetti, Luigi

1966 «Changes in the Rate of Profit and Switches of Techniques». *Quarterly Journal of Economics* 80, pp. 503-517.

1970 «Again on Capital Theory and Solow's Rate of Return». *The Economic Journal*.

2000 «Critique of the Neoclassical Theory of Growth and Distribution». Mimeo. También ha sido publicado en *Quarterly Review* 215, pp. 81-106

Robinson, Joan

1953-1954 «The Production Function and the Theory of Capital». *The Review of Economic Studies* 21(2), pp. 81-106.

1971 «The Measure of Capital: the End of the Controversy». *Economic Journal* 81(323), pp. 597-602.

1973 «La función de producción y la teoría del capital». En Oscar Braun (Ed.), *La teoría del capital y la distribución* (pp. 45-62). Buenos Aires: Tiempo Contemporáneo.

Samuelson, Paul

1962 «Parable and Realism in Capital Theory: The Surrogate Production Function». *Review of Economic Studies* 39, pp.193-206.

1966 «A Summing Up». *The Quarterly Journal of Economics* 80(4), pp. 568-583.

Solow, Robert

1955-56 «The Production Function and the Theory of Economic Growth». *The Review of Economic Studies* 23, pp. 101-108.

1963 *Capital Theory and the Rate of Return.* Amsterdam: North-Holland.

1967 «The Interest Rate and the Transition between Techniques». En C. H. Feinstein (Ed.), *Capitalism, Socialism and Economic Growth* (pp. 30-39). Cambridge: Cambridge University Press.

1970 «On the Rate of Return: a Reply to Pasinetti». *Economic Journal* 80(318), pp. 423-28.

1975 «Brief Comments». *The Quarterly Journal of Economics* 89(1), pp. 48-52.

2000 *Growth Theory*. Nueva York: Oxford University Press.

2001 *Landmark Papers in Economic Growth*. Northampton: Edward Elgar.