

CAPÍTULO 15
BREVE HISTORIA Y CONCEPTOS INTRODUCTORIOS
A LA TEORÍA DEL CRECIMIENTO

1. Suponga que la función de producción para el país X es la siguiente:

$$Q = F(K, L) = AL^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$$

- a) ¿Cuál de los dos factores, trabajo o capital, recibe un ingreso mayor como porcentaje del producto? Explique.
- b) Esta función de producción, ¿muestra retornos constantes o retornos crecientes a escala?
- c) Halle la función de producción en términos per cápita.
- d) Utilizando la siguiente función de producción lineal:

$$Y = \alpha K + \beta L$$

Y, adicionalmente, asumiendo que $\alpha = 0.6$ y $\beta = 0.7$, indicar si la función de producción exhibe rendimientos constantes, crecientes o decrecientes a escala.

¿Cambia su respuesta si $\beta = 0.4$?

2. Utilizando el siguiente cuadro:

Producto bruto interno

(Miles de millones de unidades monetarias domésticas constantes)

Año	Brasil	Colombia	Perú
2000	1024.03	196 373.85	121.06
2001	1037.47	200 657.11	121.32
2002	1065.05	205 591.28	127.40
2003	1077.26	215 073.66	132.55
2004	1138.77	225 104.16	139.14
2005	1174.78	237 982.30	148.64
2006	1221.41	254 505.55	160.15
2007	1290.66	273 710.26	174.33
2008	1356.18	280 647.87	191.48

- Halle las tasas de crecimiento promedio anuales para el periodo 2000-2008 en Brasil, Colombia y Perú.
 - Asumiendo que Brasil, Colombia y Perú van a crecer desde el 2009 en adelante a la tasa hallada en la sección a) respectivamente para cada país, ¿cuánto tardarán en duplicar su PBI?
3. Utilizando la siguiente función de producción Cobb-Douglas, que refleja la producción agregada del país Articon:

$$Y = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$$

Y, adicionalmente, asumiendo que $A = 1$ y $\alpha = 0.4$.

- ¿Cuál fue el nivel de producción en Articon para los años 2006, 2007 y 2008? Sabemos que:

Año	Capital	Trabajo
2006	200	100
2007	220	110
2008	270	110

- Halle la tasa de crecimiento promedio anual del periodo 2006-2008.

- c) Asumiendo que, desde el año 2008, el *stock* de capital permanece constante ($K = 270$), y dado que la población aumenta en 5 individuos cada año, halle el producto para los años 2009, 2010 y 2011.

4. Resolver los siguientes ejercicios:

- a) Completar el cuadro:

Ahorro inversión Perú: 2004-2008
(Millones de nuevos soles a precios de 1994)

Año	Ahorro nacional	Ahorro externo	Inversión
2004	25 045		24 976
2005	28 688		26 591
2006	37 043		32 097
2007	41 940		39 962
2008		6267	51 417

Fuente: BCRP. Elaboración propia.

- b) ¿El Perú se comportó entre los años 2004 y 2008 como prestatario o acreedor del mundo?

5. Utilizando la siguiente función de producción agregada para el país Caribeño:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

Y, adicionalmente, asumiendo que $\alpha = 0.2$:

- a) Halle la tasa de crecimiento anual del producto para el año 2007 sabiendo que la población crece a una tasa de 2% anual, que el *stock* de capital crece al 7% y la tasa de progreso tecnológico es de 1%.
- b) Se sabe que en el año 2008 el producto, la población y el capital crecieron a la tasa de 5%, 2% y 8%, respectivamente. ¿Qué porcentaje del crecimiento se atribuye al progreso tecnológico?

Solución

1. a) Los exponentes de los factores trabajo y capital indican la participación de los ingresos de cada factor en el producto bajo el supuesto de que recibe como remuneración su producto marginal. Dado que $3/4 > 1/4$, el trabajo tendrá una mayor participación que el capital.
- b) Dado que estamos frente a una función de producción Cobb-Douglas, para saber qué tipo de rendimientos a escala presenta es necesario examinar la magnitud de la suma de los exponentes de los factores capital y trabajo. Hay rendimientos crecientes si la suma es mayor que 1, decrecientes si la suma es menor que 1, y constantes si la suma es igual a 1. En este último caso, si los factores se multiplican por un factor λ , el producto también es multiplicado por el mismo factor λ . Algebraicamente, se tiene lo siguiente:

$$Q = F(K, L) = AL^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = A(L\lambda)^{\frac{3}{4}}(K\lambda)^{\frac{1}{4}}$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} A(L)^{\frac{3}{4}}(K)^{\frac{1}{4}}$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda A(L)^{\frac{3}{4}}(K)^{\frac{1}{4}} = \lambda Q$$

Como estos exponentes suman uno, se está ante una función de producción con rendimientos constantes a escala u homogénea de grado uno. También se prueba que el producto queda multiplicado por λ cuando los factores capital y trabajo son multiplicados por el mismo λ .

- c) Para expresar la función de producción en términos per cápita se divide la función de producción entre el total de trabajadores en la economía:

$$Q = f(K, L) = AL^{\frac{3}{4}}K^{\frac{1}{4}}$$

$$\frac{Q}{L} = F\left(\frac{K}{L}, 1\right) = A \frac{L^{\frac{3}{4}}}{L^{\frac{3}{4}}} \left(\frac{K}{L}\right)^{\frac{1}{4}}$$

De manera abreviada, la expresión anterior adquiere la siguiente forma:

$$\frac{Q}{L} = f(k) = Ak^{\frac{1}{4}}$$

Donde:

$$k = \frac{K}{L}$$

Esta conversión a términos per cápita es posible porque la función de producción es homogénea de grado uno.

- d) Todas las funciones de producción lineales presentan rendimientos a escala constantes, independientemente de los valores de sus parámetros. Algebraicamente, se tiene lo siguiente:

$$Q = F(K, L) = \alpha K + \beta L$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \alpha(L\lambda) + \beta(K\lambda)$$

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda(\alpha K + \beta L) = \lambda Q$$

2. a) Utilizando la fórmula para la tasa de crecimiento promedio del PBI entre los periodos 0 y t :

$$g = \sqrt[t]{\frac{PBI_t}{PBI_0}} - 1$$

La tasa de crecimiento del producto entre los años 2000-2008 es la siguiente:

Perú:

$$g_{PERÚ} = \sqrt[8]{\frac{PBI_{2008}}{PBI_{2000}}} - 1 = \sqrt[8]{\frac{191.48}{121.06}} - 1 = 5.90\%$$

Colombia:

$$g_{COL} = \sqrt[8]{\frac{PBI_{2008}}{PBI_{2000}}} - 1 = \sqrt[8]{\frac{280647.87}{196373.85}} - 1 = 4.56\%$$

Brasil:

$$g_{BRA} = \sqrt[8]{\frac{PBI_{2008}}{PBI_{2000}}} - 1 = \sqrt[8]{\frac{1356.18}{1024.03}} - 1 = 3.57\%$$

- b) Para saber cuántos años tardarán Perú, Brasil y Colombia en duplicar su PBI, se aplica la siguiente fórmula.

$$g = \sqrt[t]{\frac{PBI_t}{PBI_0}} - 1$$

Despejando el valor del PBI en el año t :

$$PBI_t = PBI_0(1 + g)^t$$

Si lo que se busca es que el PBI en el año t sea el doble del PBI en el año cero, se tiene que:

$$2PBI_0 = PBI_0(1 + g)^t$$

$$2 = (1 + g)^t$$

Tomando logaritmos y recordando sus propiedades, se tiene que:

$$\ln 2 = t \ln(1 + g)$$

$$0.69315 = gt$$

Finalmente, la cantidad de años (t) requerida para que el PBI se duplique está dada por la siguiente fórmula:

$$t = \frac{0.69315}{g}$$

Aplicando esto a los datos del problema, se obtiene lo siguiente:

$$t_{PERÚ} = \frac{0.69315}{0.059} = 11.75$$

$$t_{BRA} = \frac{0.69315}{0.0357} = 19.41$$

$$t_{COL} = \frac{0.69315}{0.0456} = 15.20$$

3. a) A partir de los datos del problema, se calcula la producción anual en el país de Articon:

Año 2006:

$$Y = (200)^{0.4}(100)^{0.6} = 131.9$$

Año 2007:

$$Y = (220)^{0.4}(110)^{0.6} = 145.1$$

Año 2008:

$$Y = (270)^{0.4}(110)^{0.6} = 157.5$$

- b) La tasa de crecimiento promedio del producto en el periodo 2006-2008 se calcula a partir de la fórmula:

$$g = \sqrt[t]{\frac{PBI_t}{PBI_0}} - 1$$

Reemplazando los datos del problema en la fórmula se obtiene que la tasa de crecimiento promedio para el periodo 2006-2008 es igual a:

$$g_{ARTICON} = \sqrt[3]{\frac{PBI_{2008}}{PBI_{2006}}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{157.54}{131.95}} - 1 = 9.27\%$$

- c) Si el *stock* de capital permanece constante a partir del año 2008 y la población crece a razón de 5 individuos por año, se tienen los siguientes datos:

Año	Capital	Trabajo
2008	270	110
2009	270	115
2010	270	120
2011	270	125

La producción anual en el país de Articon, para los años 2009, 2010 y 2011, es la siguiente:

Año 2009:

$$Y = (270)^{0.4}(115)^{0.6} = 161.79$$

Año 2010:

$$Y = (270)^{0.4}(120)^{0.6} = 165.98$$

Año 2011:

$$Y = (270)^{0.4}(125)^{0.6} = 170.09$$

4. a) Para completar el cuadro es necesario partir de la igualdad entre el ahorro y la inversión en una economía abierta:

$$S_e + S_p + S_g = I$$

$$S_n + S_e = I$$

$$S_n = S_p + S_g$$

Donde:

S_e Ahorro externo

S_p Ahorro privado

S_g Ahorro del gobierno

S_n Ahorro nacional

Ahorro inversión Perú: 2004-2008
(Millones de nuevos soles a precios de 1994)

Año	Ahorro nacional	Ahorro externo	Inversión
2004	25 045	-69	24 976
2005	28 688	-2097	26 591
2006	37 043	-4946	32 097
2007	41 940	-1978	39 962
2008	45 150	6267	51 417

Fuente: BCRP. Elaboración propia.

- b) Entre el 2004 y el 2007 el Perú generó más ahorro del que necesitó para financiar su inversión, por lo que se convirtió en acreedor neto del mundo. Perú, en 2008 registró un déficit en su cuenta corriente de su balanza de pagos.
5. a) Para obtener la tasa de crecimiento del producto correspondiente al año 2007, es necesario realizar algunas operaciones. Tras aplicar logaritmos a la función de producción agregada del país Caribeño, se tiene:

$$\ln Y = \ln A + \alpha \ln K + (1 - \alpha) \ln L$$

Se deriva con respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \ln Y}{\partial t} = \frac{1}{A} \frac{\partial \ln A}{\partial t} + \alpha \frac{1}{K} \frac{\partial \ln K}{\partial t} + (1 - \alpha) \frac{1}{L} \frac{\partial \ln L}{\partial t}$$

Con lo cual se obtiene:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1 - \alpha) \frac{\dot{L}}{L} + \frac{\dot{A}}{A}$$

En esta expresión se reemplazan los datos del problema para obtener la tasa de crecimiento del producto.

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = 0.2(0.07) + (1 - 0.2)(0.02) + 0.01 = 4\%$$

- c) Al reemplazar los datos, se obtiene el porcentaje del crecimiento que se le atribuye al cambio técnico:

$$0.05 = 0.2(0.08) + (1 - 0.2)(0.02) + \frac{\dot{A}}{A} \quad ; \quad \frac{\dot{A}}{A} = 1.8\%$$