CAPÍTULO 16
MODELOS KEYNESIANOS Y NEOCLÁSICOS

1. Indique verdadero o falso según corresponda:

   Sobre el modelo Harrod-Domar:

   a) Predice que el nivel de producción de la economía crecerá siempre a la tasa a la que crece la población.
   b) La economía se encuentra en su edad de oro cuando la tasa natural, garantizada y efectiva de crecimiento, se igualan.
   c) Existen varias tasas de ahorro posibles en una economía que son consistentes con un crecimiento con pleno empleo.
   d) El ahorro público puede contribuir a alcanzar la tasa de ahorro consistente con los planes de ahorro e inversión de los capitalistas.

   Sobre el modelo de Solow:

   e) Asume que el cociente capital-producto es constante.
   f) Cuanto mayor es la tasa de depreciación, mayor es la acumulación de capital.
   g) El equilibrio se alcanza cuando el capital per cápita crece a la misma tasa a la que crece la población.
   h) La introducción de una función de producción con rendimientos marginales decrecientes permite demostrar que el equilibrio es estable.
   i) La convergencia absoluta predice que todas las economías convergirán al mismo estado estacionario.

j) La convergencia condicional predice que economías con iguales niveles iniciales de capital convergirán al mismo estado estacionario.

k) El capital per cápita puede crecer a una tasa positiva sin la necesidad de introducir mejoras tecnológicas.

2. El modelo de Solow.

Se tiene una economía cerrada y sin gobierno:

$S = sY \quad (1)$

$I = \dot{K} + \delta K \quad (2)$

$S = I \quad (3)$

$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$, donde $\alpha < 1 \quad (4)$

$\frac{\dot{L}}{L} = n \quad (5)$

a) Caracterice cada una de las ecuaciones del modelo.

b) Encontrar la ley de movimiento del capital per cápita (dinámica del capital).

c) Suponga los siguientes valores para las variables del modelo:

$A = 1$

$\alpha = 0.7$

$s = 0.4$

$n = 0.3$

$\delta = 0.1$

Encuentre algebraicamente el valor de estado estacionario del capital per cápita.

d) Explique qué ocurre en el estado estacionario de una economía como la descrita si se da:

i) Un incremento en la tasa de ahorro s de 0.4 a 0.8.

ii) Una caída en la tasa de fertilidad de la población que implique que n caiga de 0.3 a 0.1.

Ayúdese utilizando un gráfico en el plano ($f(k)$,k).

3. Señale verdadero o falso:

   a) La tasa de ahorro siempre será igual a la tasa de inversión.

   b) Un aumento de la tasa de inversión puede mantener indefinidamente el crecimiento de la producción per cápita.

   c) Si el capital nunca se deprecia, el crecimiento de la producción per cápita puede mantenerse indefinidamente.

   d) Cuánto más alta sea la tasa de ahorro, mayor será el consumo per cápita en el estado estacionario.

4. En el modelo de Solow clásico:

   a) Verifique que en el estado estacionario, el capital, la producción, el consumo y el ahorro crecen a la tasa de crecimiento de la población.

   b) Explique los efectos sobre los valores de equilibrio del estado estacionario per cápita del *stock* de capital, el nivel de producción y el nivel de consumo de:
      i) Un incremento en el progreso técnico
      ii) Una caída en la tasa de crecimiento poblacional.

5. Se tiene una economía cerrada sin depreciación:

$$S = sY$$

$$I = \dot{K}$$

$$S = I$$

$$Y = K^{\alpha}\left(EL\right)^{\beta}$$

$$\frac{\dot{L}}{L} = n$$

$$\frac{\dot{E}}{E} = m$$

Donde $\alpha > 0$; $\beta > 0$; $\alpha + \beta = 1$ y m es la tasa de crecimiento del progreso técnico.

Además, Y es el producto; K es el acervo o *stock* de capital; L es trabajo; y E puede ser interpretado como el «conocimiento» o «efectividad del factor trabajo» (su cambio se conoce como progreso técnico). Por lo tanto, a (EL) se le denomina trabajo efectivo.

a) Presente el ahorro, la inversión, el capital y el nivel de producción por trabajador efectivo.

b) Hallar la tasa de crecimiento del capital por trabajador efectivo:

$$\frac{\partial(E.L)/\partial t}{E.L}$$

c) Encontrar la ley de movimiento del capital por trabajador efectivo.

d) ¿Cómo se define el estado estacionario en este modelo?

e) Halle la solución de estado estacionario del capital por trabajador efectivo, el producto por trabajador efectivo y el consumo por trabajador efectivo.

f) Explique intuitivamente, complementando con un gráfico, qué ocurre en el estado estacionario de una economía como la descrita antes con:

   i) Un incremento de la tasa de crecimiento del progreso técnico (m).
   ii) Una caída en la tasa de ahorro (s).

Solución

1. a) Falso.

   b) Verdadero.

   c) Falso.

   d) Verdadero.

   Sobre el modelo de Solow:

   e) Falso.

   f) Falso.

   g) Falso.

   h) Verdadero.

   i) Falso.

   j) Falso.

   k) Falso .

2. a) La ecuación (1) es la función de ahorro que depende de la producción, donde s es la propensión marginal a ahorrar y es una constante exógena. La ecuación (2) refleja la definición de inversión que, en este caso, incluye depreciación. La inversión se genera por dos motivos: la creación de nuevo capital ($\dot{K}$) y la reposición del desgaste que ocasiona el proceso productivo (δK).
   La ecuación (3) es la condición de equilibrio ahorro-inversión o entre la oferta y la demanda agregada. La ecuación (4) representa la función de producción neoclásica, con rendimientos constantes a escala y productos marginales decrecientes. La ecuación (5) es la tasa de crecimiento de la fuerza laboral, que es constante y exógena.

   b) Dado que se trata de una función de producción neoclásica homogénea de grado 1, se puede convertir dicha función a términos per cápita:

$$\frac{Y}{L} = \frac{AK^{\alpha}L^{1-\alpha}}{L} = A\left(\frac{K}{L}\right)^{\alpha} = Ak^{\alpha}$$

   Por lo tanto, el ahorro en términos per cápita será igual a:

$$\frac{S}{L} = \frac{sY}{L} = sy = sAk^{\alpha}$$

   La tasa de crecimiento de la relación capital-trabajo es igual a:

$$\frac{\dot{k}}{k} = \left(\frac{L}{K}\right)\left(\frac{L\dot{K} - K\dot{L}}{L^2}\right) = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \quad \text{donde } k = \frac{K}{L}$$

   Al despejar $\dot{k}$ de la ecuación anterior y reemplazar la tasa de crecimiento de la fuerza laboral n, se obtiene:

$$\dot{k} = \frac{\dot{K}}{L} - nk \qquad (6)$$

   Luego, de la ecuación (2), tomando en cuenta la definición de inversión en términos per cápita:

$$\frac{I}{L} = \frac{\dot{K}}{L} + \delta k \qquad (7)$$

Al despejar $\frac{\dot{K}}{L}$ de las ecuaciones (6) y (7) y, luego, al igualar ambos términos, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{I}{L} = \dot{k} + (n + \delta)k$$

Dado que es una economía cerrada y sin gobierno:

$$y = c + i$$
$$y = c + \dot{k} + (n + \delta)k$$
$$y - c = \dot{k} + (n + \delta)k$$

Según la condición de equilibrio, en términos per cápita: $i = sy$, con lo cual se obtiene la siguiente ecuación:

$$sy = \dot{k} + (n + \delta)k$$

Para hallar la ley de movimiento del capital, es necesario despejar $\dot{k}$ de la ecuación anterior, con lo que se obtiene:

$$\dot{k} = sy - (n + \delta)k$$
$$\dot{k} = s(Ak^{\alpha}) - k(n + \delta)$$

c) En estado estacionario, $\dot{k} = 0$, por lo que $s(Ak^{\alpha}) = (n + \delta)k$.

$$k^* = \left[\frac{sA}{(n+\delta)}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

Reemplazando los datos: $A = 1$, $\alpha = 0.7$, $s = 0.4$, $n = 0.3$, $\delta = 0.1$

$$k^* = \left[\frac{(0.4)x1}{(0.3+0.1)}\right]^{\frac{1}{0.3}} = 1$$

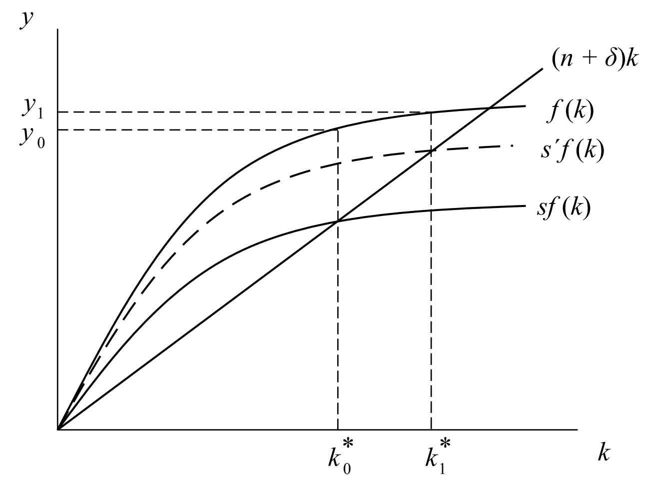
d) Explique qué ocurre en el estado estacionario de una economía como la descrita si se da:

i) Un incremento de la tasa de ahorro s de 0.4 a 0.8. Matemáticamente:

$$k^* = \left[\frac{0.8}{0.4}\right]^{\frac{1}{0.3}} = 10.08$$

Gráficamente:

Un incremento del ahorro



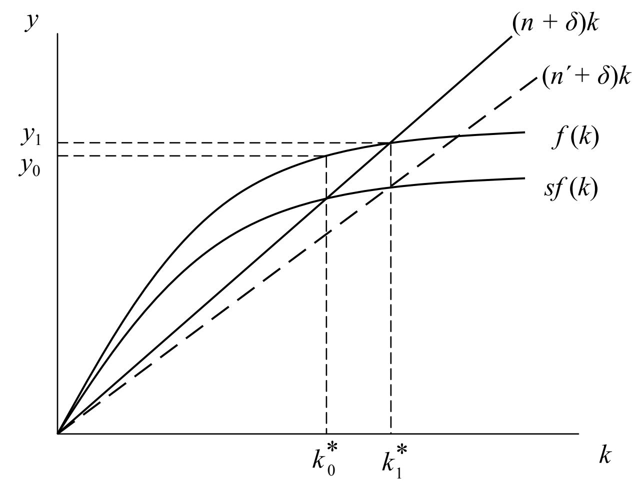
ii) Ante una caída de la tasa de fertilidad que implique una caída de *n* de 0.3 a 0.1.

Matemáticamente:

$$k^* = \left[\frac{0.4}{0.2}\right]^{\frac{1}{0.3}} = 10.08$$

Gráficamente:

Una disminución de la tasa de crecimiento de la población



3. Señale verdadero o falso:

   a) Verdadero. Dada la condición de equilibrio, esto siempre se cumplirá.

   b) Falso. Solamente se cumple hasta el estado estacionario.

   c) Falso. Solamente hasta el estado estacionario.

   d) Falso. El consumo per cápita alcanza un máximo solo cuando se cumple la Regla de Oro (producto marginal del capital igual a la tasa de crecimiento de la fuerza laboral).

4. En el modelo de Solow clásico:

   a) Verifique que en el estado estacionario (*EE*) el capital, la producción, el consumo y el ahorro crecen a la tasa de crecimiento de la población.

   El capital:

$$K = kL$$

$$\dot{K} = L\dot{k} + \dot{L}k$$

$$\frac{\dot{k}}{K} = \frac{L\dot{k} + \dot{L}k}{kL}$$

$$\frac{\dot{K}}{K} = \frac{\dot{k}}{k} + n$$

   En el EE $\dot{k} = 0$, por lo tanto $\frac{\dot{K}}{K} = n$

   La producción:

$$Y = AK^{\alpha} L^{1-\alpha}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{A\alpha K^{\alpha-1} L^{1-\alpha} \dot{K} + (1-\alpha) L^{-\alpha} K^{\alpha} \dot{L}}{AK^{\alpha} L^{1-\alpha}}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha \frac{\dot{K}}{K} + (1-\alpha) \frac{\dot{L}}{L}$$

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \alpha n + (1-\alpha) n = n$$

El ahorro:

$$S = sY$$

$$\frac{\dot{S}}{S} = \frac{s\dot{Y}}{sY} = \frac{\dot{Y}}{Y} = n$$

El consumo:

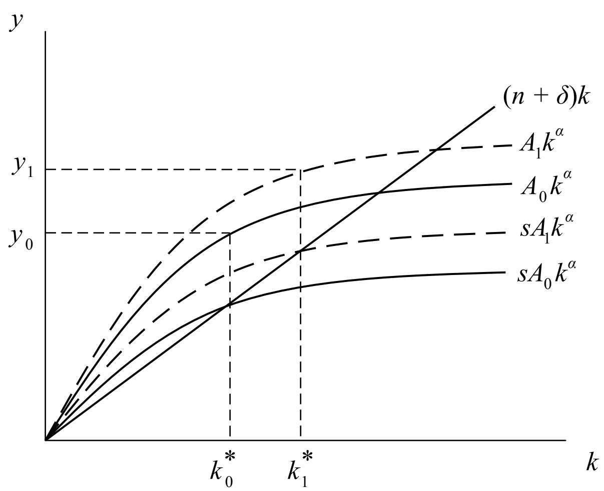
$$C = (1-s)Y$$

$$\frac{\dot{C}}{C} = \frac{(1-s)\dot{Y}}{(1-s)Y} = n$$

b) Explique los efectos sobre los valores de equilibrio del estado estacionario per cápita del *stock* de capital, el nivel de producción y el nivel de consumo de:

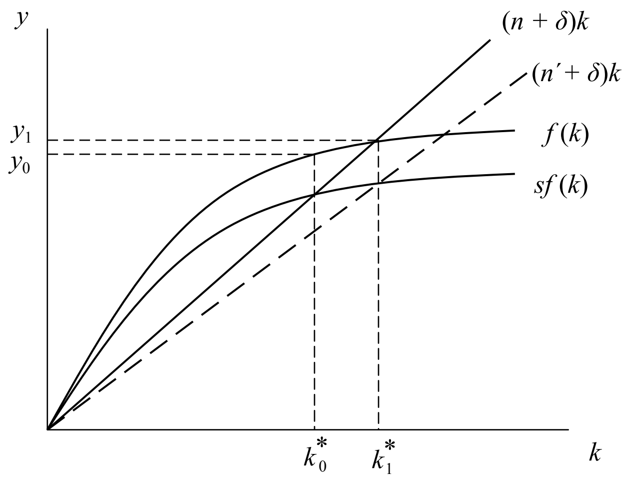
i. Incremento en el progreso técnico: para cada nivel de capital per cápita el progreso técnico implica una mayor producción per cápita y, por lo tanto, un mayor ahorro (inversión) per cápita. Dado que la tasa de depreciación y la de crecimiento poblacional no han variado, el *EE* será uno con mayor capital y producción per cápita.

Un incremento en el progreso técnico



ii. Disminución de la tasa de crecimiento poblacional: en el estado estacionario, el *stock* de capital per cápita será mayor, por lo cual la producción per cápita también será mayor. Además, dado que la tasa de crecimiento ha disminuido, la economía tardará más en llegar al estado estacionario.

Una disminución de la tasa de crecimiento de la población



5. a) En lugar de dividir a las variables entre el número de trabajadores L, como se trata de trabajadores efectivos, dividimos las variables entre EL, con lo cual tenemos que:

$$\frac{S}{EL} = s\frac{Y}{EL} = s\tilde{y}; \quad \tilde{y} = \frac{Y}{EL}; \quad \tilde{i} = \frac{I}{EL} \quad \tilde{k} = \frac{K}{EL}$$

b) La tasa de crecimiento del trabajo efectivo es igual a:

$$\frac{(\dot{EL})}{EL} = \frac{\dot{E}}{E} + \frac{\dot{L}}{L} = m + n$$

c) Para encontrar la ley de movimiento del capital por trabajador efectivo se parte de:

$$\dot{\tilde{k}} = \frac{\dot{K}EL - (\dot{EL})K}{(EL)^2} = \frac{\dot{K}}{EL} - (m+n)\tilde{k}$$

De la ecuación de inversión $I = \dot{K}$, expresados en términos de trabajador efectivo y sabiendo que la inversión es igual al ahorro, se tiene que:

$$s\tilde{y} = \frac{\dot{K}}{EL}$$

Se reemplaza esta última ecuación en la anterior, para obtener lo siguiente:

$$\dot{\tilde{k}} = s\tilde{y} - (m+n)\tilde{k}$$

Esta es la ley de movimiento del capital por trabajador efectivo.

d) El estado estacionario ocurre cuando el capital y la renta per trabajador efectivo dejan de variar en el tiempo; es decir, se mantienen constantes. En este punto, la inversión necesaria para dotar de capital a los nuevos trabajadores o para reponer el stock de capital gastado u obsoleto es igual al ahorro generado por la economía. Esto ocurre cuando $\dot{\tilde{k}} = 0$.

e) La solución de estado estacionario para las variables del modelo está dada por:

El capital por trabajador efectivo: cuando $\dot{\tilde{k}} = 0 \Rightarrow s\tilde{k}^{\alpha} = (m+n)\tilde{k}$

Se despeja $\dot{\tilde{k}}$ y obtenemos el capital por trabajador efectivo igual a:

$$\tilde{k}^* = \left(\frac{s}{m+n}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

De la misma manera, se sabe que cuando $\dot{\tilde{k}} = 0 \Rightarrow s\tilde{y} = (m+n)\tilde{y}^{1/\alpha}$

Por lo tanto, nuestro producto por trabajador efectivo será:

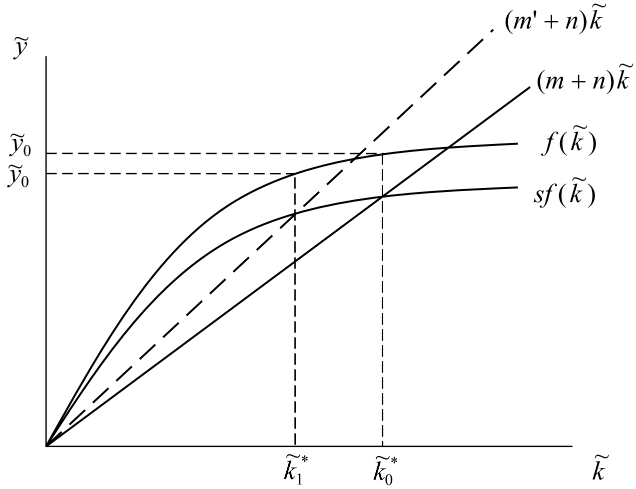
$$\tilde{y}^* = \tilde{k}^{\alpha} = \left(\frac{s}{m+n}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

Sabemos que $\tilde{c}^* = (1-s)\tilde{y}^*$. Entonces, al reemplazar el valor de $\tilde{y}^*$ obteniendo el consumo por trabajador efectivo.

$$\tilde{c}^* = (1-s)\left(\frac{s}{m+n)}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}}$$

f) Respuesta:

i. Cuando aumenta la tasa de crecimiento del progreso técnico en el estado estacionario, el nivel de capital en términos de trabajador efectivo serán menor, por lo que el nivel de producción por trabajador efectivo también será menor.



ii. Cuando la tasa de ahorro disminuye —dado que la inversión es igual al ahorro—, la inversión también disminuye y, por lo tanto, disminuye el capital y el producto por trabajador efectivo en el estado estacionario.